ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Cours d'Analyse I et II

Sections
Microtechnique
&
Science et génie des matériaux

Dr. Philippe Chabloz

avril 2013

Table des matières

Chapitre 1

Sur les nombres

1.1 Les nombres entiers

1.1.1 Définitions et notations

On note

$\mathbb{N} = \{0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels ;

$\mathbb{Z} = \{\ldots,\, -3,\, -2,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \ldots\}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs.

1.1.2 Démonstration par récurrence

On utilise ce type de démonstration lorsque l'énoncé à démontrer dépend d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$.
Soit $P(n)$ un énoncé dépendant de $n \in \mathbb{N}$ et ayant un sens pour tout $n \geqslant n_0 \in \mathbb{N}$ (souvent $n_0 = 0$ ou 1). La démonstration par récurrence de $P(n)$ comporte 2 étapes, la seconde possédant 2 variantes :

1) On montre d'abord que le résultat est vrai pour $n = n_0$.
2) On démontre ensuite, en admettant que le résultat est vrai pour $n \geqslant n_0$, qu'il reste vrai pour $n + 1$. On montre donc l'implication

$$P(n) \Longrightarrow P(n+1) \qquad\qquad \forall n \geqslant n_0$$

Variante 2') On admet le résultat pour tout k tel que $n_0 \leqslant k \leqslant n$ et on le démontre pour $n + 1$. On démontre donc, dans cette variante, l'implication

$$\big[P(k) \quad \forall k \in \{n_0\,,\, n_0+1\,, \ldots,\, n\}\big] \quad \Longrightarrow \quad P(n+1).$$

Exemples 1.1.

(a) Montrons que

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \geqslant 1.$$

1) L'affirmation est vraie pour $n = 1$ car $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.
2) Supposons la formule vraie pour $n \geqslant 1$ et montrons-la pour $n + 1$.

$$S(n+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ce qui montre que la formule reste vraie pour $n + 1$.

(b) Démontrons la formule suivante :

$$S(n) = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

1) La formule est vraie pour $n = 1$ car $1 = \frac{1}{6}1 \cdot 2 \cdot 3$.
2) On suppose que la formule est vraie pour n. Alors

$$\begin{aligned}
\underbrace{1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}_{=\frac{1}{6}\cdot n(n+1)(2n+1)} + (n+1)^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n^2 + 2n + 1 \\
&= \frac{1}{6}\big(n(n+1)(2n+1) + 6n^2 + 12n + 6\big) \\
&= \frac{1}{6}\big(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6\big) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)
\end{aligned}$$

ce qui démontre la formule pour $n + 1$.

1.1.3 Nombres premiers

Définition 1.2. On dit qu'un entier $n \in \mathbb{N}$ est *premier* s'il est $\geqslant 2$ et qu'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

Exemple 1.3. 2, 3, 5, 7, 11, ... sont premiers alors que 0, 1, 8, 9, 16, 22 ne le sont pas.

Théorème 1.4. *Tout nombre naturel $n > 1$ s'écrit de manière unique comme produit de nombres premiers, i.e.*

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$$

où $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ sont des premiers uniques et les e_i sont des entiers $\geqslant 1$ également uniquement déterminés par n.
De plus, les nombres premiers $p_1, p_2, \cdots, p_n$ sont les uniques nombres premiers divisant n.

Démonstration : (par récurrence)
Ici, le début de la récurrence est $n_0 = 2$.
1) Si $n = 2$, alors le théorème est vrai car 2 est premier.
2') Supposons l'énoncé vrai pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$ et considérons $n + 1$.
Si $n + 1$ est un nombre premier, alors l'affirmation est vraie.
Sinon, on a $n + 1 = md$ avec $1 < m, d \leqslant n$. Par hypothèse de récurrence, le théorème est vrai pour d et m. Ainsi

$$d = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$$
$$m = q_1^{c_1} q_2^{c_2} \dots q_s^{c_s}$$

et donc $n + 1 = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r} q_1^{c_1} q_2^{c_2} \dots q_s^{c_s}$ où les p_i et les q_j sont des nombres premiers.
L'unicité de cette décomposition est admise sans preuve ici.

□

Théorème 1.5 (Euclide)**.** *Il existe une infinité de nombres premiers*

Démonstration :
Supposons, par l'absurde, qu'il existe un nombre fini n de premiers et notons-les p_1, p_2, $\dots p_n$. Soit

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

Par les théorèmes précédents, il est alors divisible par un nombre premier c'est-à-dire qu'il existe un p_i qui divise N. Mais comme p_i divise également le produit $p_1 p_2 \cdots p_n$, il doit diviser aussi la différence, c'est-à-dire $N - p_1 p_2 \cdots p_n = 1$ ce qui est absurde. Il existe donc une infinité de nombres premiers.

□

1.1.4 La formule du binôme

Définition 1.6 (Coefficients binomiaux)**.** On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \leqslant n$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}.$$

Remarque 1.7. Par symétrie de la définition, on a toujours

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

Exemple 1.8. $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6 \qquad \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4 \qquad \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$

Propriétés : On a, entre autres,

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$
2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ (cf. exercices)

Le triangle de Pascal

Les formules 1-3 ci-dessus permettent de construire le *triangle de Pascal.*

Les coefficients binomiaux sont utiles pour calculer $(a+b)^n$:

Théorème 1.9 (Formule du binôme)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n \;+\; \binom{n}{1}a^{n-1}b \;+\; \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 \;+\; \ldots \;+\; \binom{n}{n-1}ab^{n-1} \;+\; b^n\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.\end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

Démonstration : Par récurrence :
1) La formule est clairement vraie pour $n = 0$ et 1.
2) Supposons la formule vraie pour $n \geqslant 1$ et montrons-la pour $n + 1$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \quad + \quad b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k \quad + \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k \quad + \quad \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^{n-j+1}b^j \qquad j := k+1 \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} \quad + \quad \left[\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\right]a^n b \quad + \quad \left[\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\right]a^{n-1}b^2 \quad + \dots \\
&\qquad \cdots + \left[\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}\right]ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \dots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} \\
&\quad \text{(par la propriété 3 ci-dessus)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k.
\end{aligned}$$

1.2 Les nombres rationnels

On définit

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}\ ;\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\}$$

avec l'équivalence

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Longleftrightarrow mn' = m'n.$$

C'est l'ensemble des *nombres rationnels.*
Dans $\mathbb{Q}$, les 4 opérations sont toujours possibles à l'exception, bien sûr, de la division par 0. On dit que $\mathbb{Q}$ est un *corps.*

Problème : il existe des longueurs dans le plan ne correspondant à aucun nombre rationnel. En effet considérons la diagonale du carré de côté égal à 1. Alors par Pythagore, sa longueur c doit satisfaire $c^2 = 1 + 1 = 2$, donc $c = \sqrt{2}$. Or

Proposition 1.10. *Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.*

Démonstration : Supposons, par l'absurde, qu'il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et supposons que la fraction est réduite, c'est-à-dire que p et q sont premiers entre eux (pgcd(p,q)=1). En élevant au carré, on obtient

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

ce qui donne $2q^2 = p^2$. L'entier p^2 est donc pair ce qui signifie que p l'est aussi. Donc $p = 2p'$ et alors on a

$$2q^2 = p^2 = (2p')^2 = 4p'^2.$$

En divisant par 2, on obtient $q^2 = 2p'^2$ ce qui montre que q est également pair ce qui contredit le fait que la fraction est réduite. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

$\square$

De ce fait on introduit

1.3 Les nombres réels

1.3.1 Introduction

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. On peut 'voir' les nombres réels comme toutes les longueurs géométriques obtenues le long d'une droite.
Représentation :

Exemples 1.11. Les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{5}$, π, $\sqrt{\pi}$, e, e^2, $\ln(5)$ sont tous des nombres réels non rationnels.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est un *corps*, *totalement ordonné*, *archimédien*, *complet* :
- totalement ordonné : on peut toujours comparer 2 réels r et u ; soit $u > r$, soit $u < r$, soit $u = r$.
- archimédien : pour tout couple (x, y) de nombres réels, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$
- complet : cf. chapitre 2.

Notation 1.12.

$$\begin{array}{ll} r \in \,]a;b[\iff a < r < b & \text{intervalle ouvert} \\ r \in [a;b] \iff a \leqslant r \leqslant b & \text{intervalle fermé} \\ r \in \,]a;b] \iff a < r \leqslant b & \text{intervalle semi-ouvert} \end{array}$$

Définition 1.13. Si $r \in \mathbb{R}$ et $r \notin \mathbb{Q}$, alors r est dit *irrationnel.*

Exemples 1.14.

$$\pi \text{ (transcendant)} \qquad \sqrt{2} \text{ (algébrique).}$$

Proposition 1.15. *Considérons le nombre $\sqrt{N}$ où $N \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\begin{cases} \sqrt{N} \in \mathbb{N} & \text{si } N \text{ est un carré dans } \mathbb{N} \\ \sqrt{N} \notin \mathbb{Q} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La démonstration est une généralisation de celle faite pour démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1.3.2 Développement décimal

Théorème 1.16. *Soit r un nombre réel. Alors r est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique.*

Démonstration :
Montrons d'abord que si r est rationnel, alors son développement décimal est périodique. Soit $r = \frac{m}{n}$. On peut supposer $m < n$. Alors

$$r = \frac{m}{n} = 0, c_1c_2c_3c_4\dots$$

où les c_i sont obtenus par une division euclidienne. Les restes successifs r_i sont toujours $< n$. Après au plus n divisions, on retrouvera donc un reste r_j égal à un reste précédent r_i et le processus de division devient périodique.
Le développement devient donc périodique à partir de la décimale c_i. Notons que la longueur de la période est au plus égale à n.

Exemple 1.17.

$$\frac{2}{7} =$$

Montrons la réciproque. Soit

$$r = d_1d_2\dots d_m, e_1e_2\dots e_r\overline{c_1c_2\dots c_n}$$

un nombre réel dont le développement décimal est périodique. On va montrer que $r \in \mathbb{Q}$. Il est clair que le nombre $d_1d_2\dots d_m, e_1e_2\dots e_r$ est rationnel. Il suffit donc de montrer que

$$s = 0, \overline{c_1c_2\dots c_n}$$

est rationnel. Posons $N = c_1c_2\dots c_n$. Alors

$$\begin{aligned} 10^n s = {} & c_1c_2\dots c_n, \overline{c_1c_2\dots c_n} \\ s = {} & \qquad\quad 0, \overline{c_1c_2\dots c_n} \end{aligned}$$

En soustrayant la seconde ligne à la première, on obtient

$$(10^n - 1)s = c_1c_2\dots c_n = N$$

et donc

$$s = \frac{N}{10^n - 1}.$$

□

Exemples 1.18.
1) Soit $r = 0, 34\overline{526}$.

$s = 0, \overline{526}$, $N = 526$, $n = 3$.
Alors

$$s = \frac{526}{10^3 - 1} = \frac{526}{999}$$

et

$$r = \frac{34}{100} + \frac{526}{99900} = \frac{8623}{24975}.$$

2) Soit $s = 0, \overline{13}$. Alors $N = 13$, $n = 2$ et

$$s = \frac{13}{10^2 - 1} = \frac{13}{99}.$$

1.3.3 Majorants et bornes supérieures

Dans cette section, S désignera soit $\mathbb{Q}$ soit $\mathbb{R}$ et A sera un sous-ensemble non vide de S.

Définition 1.19. A est dit **majoré** (resp. **minoré**) dans S s'il existe $s \in S$ tel que $a \leqslant s$ (resp. $a \geqslant s$) pour tout $a \in A$.
L'élément $s \in S$ est appelé **un majorant** (resp. **un minorant**) de A.
Le sous-ensemble A est dit **borné** s'il est à la fois majoré et minoré.

Remarques :
1) L'élément s n'appartient pas nécessairement à A.
2) Si A possède un majorant, alors il en possède une infinité. En effet, si s est un majorant de A, alors tout $t \in S$ tel que $t \geqslant s$ est aussi un majorant.

Définition 1.20 (Borne supérieure ou supremum)**.** Un majorant s de A est appelé la **borne supérieure** ou **supremum** de A s'il est le plus petit des majorants, c'est-à-dire si, pour tout autre majorant s' de A, on a $s \leqslant s'$.
On note alors $s = \sup A$.
Si A n'est pas majoré, on pose $\sup A = \infty$

Définition 1.21 (Borne inférieure ou infimum)**.** Un minorant s de A est appelé la **borne inférieure** ou **infimum** de A s'il est le plus grand des minorants.
On note alors $s = \inf A$.
Si A n'est pas minoré, on pose $\inf A = -\infty$.

Remarque : Si le supremum (resp. l'infimum) existe, il est unique.

Remarque : Si le supremum (resp. l'infimum) de A appartient à A, on dit que c'est le *maximum* (resp. *le minimum*) de A et on le note $\max A$ (resp. $\min A$).

Exemple 1.22. soit $A =]0;1]$, $S = \mathbb{R}$ alors $\sup A = 1 = \max A$ et $\inf A = 0 \notin A$

Propriétés des nombres réels

(C) Dans $\mathbb{R}$, tout sous-ensemble (non vide) possède une borne supérieure et une borne inférieure.

Remarque : Cette propriété n'est pas vraie dans $\mathbb{Q}$:

Exemple 1.23. Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\}$$

C'est un sous-ensemble borné de $\mathbb{Q}$ car, par exemple, $\frac{3}{2}$ est un majorant de A et $-\frac{3}{2}$ est un minorant de A. Mais il ne possède ni de borne supérieure ni de borne inférieure dans $\mathbb{Q}$.
En revanche, si on considère A comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors la propriété (C) ci-dessus assure l'existence d'une borne supérieure $r = \sup A$ et d'une borne inférieure $s = \inf A$. On montre alors facilement que $r^2 = s^2 = 2$ et donc que

$$\sup A = \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \inf A = -\sqrt{2}.$$

1.4 Les nombres complexes

1.4.1 Définition et propriétés

Dans $\mathbb{R}$,
- 4 opérations possibles ;
- toutes les racines n-ièmes de tous les nombres positifs existent.

MAIS $\sqrt{-1}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$. Ou autrement dit, le polynôme X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}$.

On introduit alors le nombre i défini par

$$\boxed{i^2 = -1}$$

et l'*ensemble des nombres complexes* est alors

$$\boxed{\mathbb{C} := \{a+bi\ ;\ a,b \in \mathbb{R}\}}$$

Exemples 1.24.
$1+3i$ $\quad \sqrt{2}-\pi i$ $\quad 4,$ $\quad \sqrt{5},$ $\quad \pi^2$ $\quad \frac{2}{3}i,$ $\quad 1-\frac{4}{3}i$ sont des nombres complexes.

Terminologie

Soit $z = a+bi$ un nombre complexe. Le nombre réel a est appelé la **partie réelle** de z et est noté $\mathcal{R}e(z)$.
Le nombre réel b est la **partie imaginaire** de z et est noté $\mathcal{I}m(z)$.
Si $b=0$, z est **réel**.
Si $a=0$, alors z est dit **imaginaire (pur)**

On définit les 4 opérations dans $\mathbb{C}$ de la manière suivante :

Addition :

$z_1 = a+bi \qquad z_2 = c+di$

$$z_1+z_2 = (a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

Opposé :

Si $z = a+bi$, alors

$$-z = -a-bi.$$

Exemples 1.25.

$$(1+i)+(3-4i) = (1+3)+(1-4)i = 4-3i$$
$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)+(1+\frac{3}{2}i) = \sqrt{2}+1+(\sqrt{3}+\frac{3}{2})i$$
$$(2-i)-(1+4i) = 2-1-i-4i = 1-5i$$

Multiplication :

Si $z_1 = a + bi$ et $z_2 = c + di$ alors

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad+bc)i$$

car $i^2 = -1$.

Inverse :

Tout nombre complexe $z \neq 0$ a un **inverse** : si $z = a + bi$ alors

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\, i}$$

Vérification :

$$\begin{aligned} z \cdot \frac{1}{z} &= (a+bi) \cdot \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{(a+bi)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{a^2 - abi + abi - b^2i^2}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1. \end{aligned}$$

Donc, en ajoutant simplement à $\mathbb{R}$ le nombre i et tous les nombres de la forme $a + bi$, on obtient un **corps** : les 4 opérations sont possibles.

ATTENTION : $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné : $z_1 < z_2$ n'a aucun sens ! ! ! ! !

Propriétés dans $\mathbb{C}$

1. Commutativité : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
   $z_1 z_2 = z_2 z_1$

2. Associativité : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
   $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

3. Distributivité de l'addition
   par rapport à la multiplication : $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

1.4.2 Représentation dans le plan, module et argument

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. On peut lui associer le point $P_z(a\,;\,b)$ du plan.

Définition 1.26. Soit $z = a + bi$.

Le **module** de z est le nombre réel $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (toujours $\geqslant 0$).

L' **argument** de z est le nombre réel $\arg(z) = \theta$ défini par les **deux** égalités :

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{|z|}$$
$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{|z|}$$

ATTENTION : On a $\tan(\theta) = \dfrac{b}{a}$ mais θ n'est pas toujours égal à $\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

Exemples 1.27. 1) $z = -2 + 6i \longleftrightarrow P_z(-2, 6)$

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40}$$
$$\arctan(6/-2) = -1.249 \quad \text{Mais } \theta = -1.249 + \pi = 1.893.$$

2) $z = -6 \longrightarrow P(-6; 0)$

$$r = |z| = 6$$
$$\arg(z) = \pi.$$

3) $z = 3i \longrightarrow P(0; 3)$

$$r = |z| = 3$$
$$\arg(z) = \frac{\pi}{2}.$$

1.4.3 Conjugué complexe

Si $z = a + bi$, on définit

$$\boxed{\overline{z} = a - bi.}$$

On a alors

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Quelques propriétés

1) $z\overline{z} = |z|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}.$

2) $\overline{\overline{z}} = z \quad ; \qquad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

3) $|\overline{z}| = |z| \;\; ; \qquad \arg(\overline{z}) = -\arg(z).$

4) $z + \overline{z} = 2a \quad ; \qquad z - \overline{z} = 2bi$

5) $\overline{z^2} = (\overline{z})^2$ car

$$\overline{(a + bi)^2} = \overline{a^2 - b^2 + 2abi} = a^2 - b^2 - 2abi = (a - bi)^2 = \left(\overline{a + bi}\right)^2.$$

Conséquence : $\boxed{\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}}$

En effet, d'une part

$$\overline{(z + w)^2} = \left(\overline{z + w}\right)^2 = (\overline{z} + \overline{w})^2 = \overline{z}^2 + 2\overline{z} \cdot \overline{w} + \overline{w}^2$$

et d'autre part

$$\overline{(z + w)^2} = \overline{z^2 + 2zw + w^2} = \overline{z}^2 + \overline{2zw} + \overline{w}^2.$$

Donc $2\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{2zw}$ ce qui implique $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

6)

$$\boxed{|zw| = |z| \cdot |w|}$$

Le module d'un produit est égal au produit des modules.

Démonstration :

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= zw \cdot \overline{zw} = zw\overline{z}\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} \\ &= |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2 \end{aligned}$$

Comme tout est positif, on a encore $|zw| = |z||w|$.
Corollaire :

$$\boxed{\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}}$$

$$\boxed{\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}}$$

7) Inégalité du triangle :

$$|z+w| \leqslant |z| + |w|$$

Démonstration :
On a d'abord

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geqslant \sqrt{a^2} = |a| \geqslant a = \mathcal{R}e(z). \qquad (*)$$

Alors

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\
&= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{\overline{w}z} + |w|^2 \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2\mathcal{R}e(z\overline{w}) \\
\text{par } (*) \quad &\leqslant |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z|+|w|)^2.
\end{aligned}$$

Donc $|z+w| \leqslant |z| + |w|$.

1.4.4 Forme trigonométrique

Soit $z = a + bi$ et $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

On a $a = r\cos(\theta)$ et $b = r\sin(\theta)$. Donc

$$z = a + bi \quad = \quad r\cos(\theta) + r\sin(\theta)i \quad = \quad r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Le nombre z est entièrement déterminé par son module et son argument. On note alors

$$z = [r;\theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

C'est la *forme trigonométrique* de z.

Exemples 1.28. 1) $z = -6 = [6;\pi]$
2) $z = -2+6i = [\sqrt{40}; 1.8925]$
3) $z = 3i = [3;\pi/2]$.

Produit et inverse sous forme trigonométrique

Soient

$$z_1 = [r_1;\theta_1] = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \qquad \text{et} \qquad z_2 = [r_2;\theta_2] = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

Alors

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right] \\
&= r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right].
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|}$ et $\boxed{\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)}$

Ainsi

$$\boxed{\text{l'argument d'un produit est égal à la somme des arguments.}}$$

Il s'ensuit que

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = \arg\left(\frac{1}{|z|^2}\right) + \arg(\overline{z}) = 0 - \arg(z) = -\arg(z).$$

On en déduit

$$\boxed{\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) + \arg\left(\frac{1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)}$$

En résumé

1. $[r_1; \theta_1] \cdot [r_2; \theta_2] = [r_1 r_2; \theta_1 + \theta_2]$
2. $$\frac{[r_1; \theta_1]}{[r_2; \theta_2]} = \left[\frac{r_1}{r_2}; \theta_1 - \theta_2\right]$$
3. $z^n = [r; \theta]^n = [r^n; n \cdot \theta]$

Exemple 1.29. Calculons $z = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.
On a $1 + i = [\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}]$ et $1 - i = [\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}]$. Alors

$$\begin{aligned} z &= \frac{[\sqrt{2}; \pi/4]^9}{[\sqrt{2}; -\pi/4]^7} = \frac{[\sqrt{2}^9; 9\pi/4]}{[\sqrt{2}^7; -7\pi/4]} = \frac{[16\sqrt{2}; 9\pi/4]}{[8\sqrt{2}; -7\pi/4]} = \left[\frac{16\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}; 9\pi/4 - (-7\pi/4)\right] \\ &= [2; 4\pi] = [2; 0] = 2. \end{aligned}$$

Applications :

Soit $z = [1; \theta] = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Alors

$$z^n = [1^n; n\theta] = [1; n\theta] = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Donc

$$\boxed{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)} \qquad \text{Formule de Moivre}$$

En particulier, si $n = 3$, on trouve

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3i^2\cos\theta\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)\end{aligned}$$

On en déduit les formules trigonométriques pour le triple d'un angle :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ \sin(3\theta) &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\end{aligned}}$$

Remarque 1.30.
1. $z = 0$ n'a pas de forme trigonométrique car son argument n'est pas défini. En revanche $|0| = 0$.
2. L'argument n'est défini qu'à un multiple de 2π près. Ainsi
$$[r;\theta] = [r;\theta + k\cdot 2\pi] \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
3. On verra au chapitre 2 que
$$[r\,;\,\theta] = re^{i\theta}.$$

1.4.5 Similitude du plan complexe

On peut faire correspondre à toute **similitude du plan complexe** une **opération algébrique** dans $\mathbb{C}$.

(I) Translation de vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\longleftrightarrow$ Addition du nombre $w = a + bi$.

(II) Homothétie de rapport $r \in \mathbb{R}$ $\longleftrightarrow$ Multiplication par $w = r$.

(III) Rotation d'angle φ $\longleftrightarrow$ Multiplication par le nombre $w = [1;\varphi] = \cos\varphi + i\sin\varphi$.
En effet, si $z = [r\,;\,\theta]$ alors $z\cdot w = [r\,;\,\theta + \varphi]$

(IV) Symétrie d'axe Ox $\quad\longleftrightarrow\quad$ prise du conjugué : $z \mapsto \overline{z}$.

(V) etc....

1.4.6 Racines n-ième d'un nombre complexe

Soit $z = [r;\theta]$ un nombre complexe (donné sous forme trigo) et n un entier $\geqslant 1$. On cherche tous les nombre complexes w tels que

$$w^n = z \qquad \text{racines } n\text{-ième de } z.$$

Les w sont donc les solution (dans $\mathbb{C}$) de l'équation $X^n - z = 0$.

Posons $w = [s;\phi]$ et déterminons s et ϕ. On doit avoir

$$[s;\phi]^n = [r;\theta]$$

donc

$$[s^n; n\phi] = [r; \theta + k\cdot 2\pi] \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Ceci donne le système

$$\begin{cases} s^n = r \\ n\phi = \theta + k\cdot 2\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

dont les solutions sont données par

$$\begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \phi = \dfrac{\theta}{n} + k\cdot\dfrac{2\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Il y a donc exactement n racines n-ième de z distinctes données par

$$\boxed{w_k = \left[\sqrt[n]{r}; \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right] \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1.}$$

En résumé, on a la formule suivante pour tout $q \in \mathbb{Q}$:

$$\boxed{[r\,;\,\theta]^q = [r^q\,;\,q\theta + kq2\pi] \qquad k \in \mathbb{Z}}$$

Exemples 1.31.

1) $z = 1 = [1;0]$. Les racines n-ième de 1 sont

$$w_k = \left[\sqrt[n]{1}; 0 + k\frac{2\pi}{n}\right] = \left[1; k\frac{2\pi}{n}\right] \qquad k = 0,1,2\ldots,n-1.$$

(On a $w_0 = [1,0] = 1$)

Les w_k sont sur les sommets d'un n-gone régulier.
Les w_k sont les racines (les zéros) dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^n - 1$.

2) Si $n = 3$ dans l'exemple 1) ci-dessus, alors on a

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 \\ w_1 &= [1; \frac{2\pi}{3}] = 1(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i =: j \\ w_2 &= [1; 2\cdot\frac{2\pi}{3}] = 1(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i =: \overline{j} \end{aligned}$$

On peut vérifier directement par calcul que

$$j^3 = \overline{j}^3 = 1.$$

Ainsi, dans $\mathbb{C}$, le polynôme $X^3 - 1$ se décompose en

$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1) = (X-1)(X-j)(X-\overline{j}).$$

Cas particulier : racines carrées ($n = 2$)

Le nombre complexe $z = [r, \theta]$ a deux racines carrées qui sont données par

$$\begin{aligned} w_0 &= [\sqrt{r}; \frac{\theta}{2}] \\ w_1 &= [\sqrt{r}; \frac{\theta}{2} + \pi] = -w_0. \end{aligned}$$

Dans ce cas précis des racines carrées, on peut également résoudre le problème sans passer par la forme trigonométrique . En effet, si $z = a + bi$ est donné, on cherche $w = u + vi$ tel que $w^2 = z$, i.e

$$(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi = a + bi$$

ce qui donne le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} u^2 - v^2 = a & \\ 2uv = b & \\ u^2 + v^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & \quad \text{car } "|\sqrt{z}| = \sqrt{|z|}" \end{array} \right. \qquad (*)$$

Exemples 1.32.

1) Cherchons les 2 racines carrées du nombre $z = i$. On résoud le système (*)

$$\left\{ \begin{array}{l} u^2 - v^2 = 0 \\ 2uv = 1 \\ u^2 + v^2 = 1 \end{array} \right.$$

ce qui donne $u = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc $v = u$.
Les 2 racines carrées de i sont $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$.

2) Trouver les 2 racines carrées de $z = 3 - 4i$. On a $|z| = \sqrt{9 + 16} = 5$ et $\arg(z) = -0.92729$. Ainsi

$$z = [5; -0.9273]$$

et donc
$$w_0 = [\sqrt{5}; -\frac{0.9273}{2}] = \sqrt{5} \cdot \left[\cos\left(-\frac{0.9273}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{0.9273}{2}\right)\right] = 2 - i.$$
Et alors $w_1 = -w_0 = -2 + i$.
Pas de choix canonique.

ATTENTION La notation $\sqrt{z}$ est à éviter. Exemple :
$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = -1 \qquad !!!!!!!!$$

1.5 Polynômes et racines

1.5.1 Définition et division euclidienne

Soit X une *indéterminée* ou *variable*. Alors $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ avec $a_n \neq 0$ est appelé un polynôme de degré n. On note $n = \deg(P)$. Les nombres a_k sont les *coefficients du polynôme*. Ils peuvent être réels ou complexes.
Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils sont de même degré et que leurs coefficients sont égaux.
On dit qu'un nombre (réel ou complexe) z_0 est une *racine* de $P(X)$ si $P(z_0) = 0$ autrement dit si
$$a_n z_0^n + \cdots + a_1 z_0 + a_0 = 0.$$

Division euclidienne

Soient $P(X)$ et $D(X)$ deux polynômes. Alors il existe 2 polynômes $Q(X)$ et $R(X)$ avec $\deg(R) < \deg(D)$ tels que
$$P(X) = D(X)Q(X) + R(X).$$
Le polynôme $R(X)$ est le reste de la division de $P(X)$ par $D(X)$.

En particulier si $D(X) = X - z_0$ (degré 1) alors
$$P(X) = Q(X)(X - z_0) + R \quad R \in \mathbb{R}$$
avec $P(z_0) = 0 \Leftrightarrow R = 0$.
En résumé, un polynôme possède z_0 comme racine si et seulement s'il est divisible par $X - z_0$.

Corollaire 1.33. *Un polynôme de degré n possède au plus n racines.*

1.5.2 Théorème fondamental de l'algèbre

Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes joue un rôle capital dans l'existence des zéros d'un polynôme à cause du théorème suivant :

Théorème 1.34 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** *Tout polynôme $P(X)$ de degré $\geqslant 1$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ a (au moins) une racine dans $\mathbb{C}$.*

Sans démonstration.

En utilisant la division euclidienne, on peut formuler ce théorème ainsi :

Tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ se factorise en un produit de polynômes de degré 1.

Polynôme à coefficients réels

Proposition 1.35. *Soit* $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ *un* **polynôme à coefficients réels** *:* $a_k \in \mathbb{R}$. *Si* $z \in \mathbb{C}$ *est un zéro de* $P(X)$*, alors* $\overline{z}$ *l'est aussi.*

Démonstration :
On a par hypothèse $P(z) = 0$, c'est-à-dire

$$a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0.$$

En prenant le conjugué des deux côtés de cette égalité, on obtient

$$\overline{a_n} \cdot \overline{z}^n + \cdots + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_0} = 0.$$

Mais comme les a_k sont réels, on a $\overline{a_k} = a_k$ pour tout k et donc $a_n \overline{z}^n + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0$ ce qui montre que $P(\overline{z}) = 0$

□

Corollaire 1.36. *Tout polynôme à coefficients réels se factorise en un produit de polynômes du premier ou du deuxième degré.*

Démonstration :
Soit $P(X)$ un polynôme réel. Par le théorème fondamental de l'algèbre, il se factorise **dans** $\mathbb{C}$ en produit de facteurs du premier degré :

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - z_i) \qquad (n = \text{ degré de } P).$$

Si z_i n'est pas réel, alors $\overline{z_i}$ doit aussi apparaître dans cette décomposition par la proposition précédente. En multipliant les 2 termes

$$(X - z_i) \qquad \text{et} \qquad (X - \overline{z_i})$$

on obtient le polynôme

$$X^2 - (z_i + \overline{z_i})X + z_i \cdot \overline{z_i} = X^2 - 2\mathcal{R}e(z_i)X + |z_i|^2$$

qui est à coefficients réels.

□

1.5.3 Equations du second degré

Les solutions de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ sont données par la formule :

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{avec} \quad a, b, c \in \mathbb{C}.$$

1.5.4 Equations de degré 3

Soit $X^3 + aX^2 + bX + c = 0$. En posant $Y = X + \frac{a}{3}$, on se ramène à une équation de la forme

$$Y^3 + pY + q = 0.$$

On pose alors $R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Trois cas peuvent se présenter :

- $R > 0$. Alors on pose

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} \qquad \text{et} \qquad w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}}$$

et les 3 solutions sont

$$Y_1 = v + w \quad \text{(réelle)} \qquad Y_{2,3} = -\frac{v+w}{2} \pm \frac{v-w}{2}\sqrt{3} \cdot i \quad \text{(complexes)}$$

- $R = 0$. Alors il y a deux racines réelles dont une est double :

$$Y_1 = \sqrt[3]{-4q} \qquad \text{et} \qquad Y_{2,3} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

- si $R < 0$, on pose $S = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$ et $\cos\theta = -\frac{q}{2R}$. Les 3 racines réelles sont alors données par la formule :

$$Y_k = 2\sqrt[3]{S}\cos(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{3}) \quad k = 0, 1, 2.$$

Exemple 1.37.
Considérons l'équation $X^3 - 21X^2 + 123X - 247 = 0$. En posant $Y = X - 7$, on obtient

$$(Y + 7)^3 - 21(Y + 7)^2 + 123(Y + 7) - 247 = 0$$

ou encore

$$Y^3 - 24Y - 72 = 0.$$

Alors $p = -24$ et $q = -72$ ce qui donne $R = (-36)^2 + (-8)^3 = 784 > 0$ et $\sqrt{R} = 28$. On a alors $v = 4$ et $w = 2$ ce qui donne $Y_1 = v + w = 6$ et $Y_{2,3} = -3 \pm \sqrt{3} \cdot i$. Les solutions sont alors

$$X_1 = Y_1 + 7 = 13 \qquad \text{et} \qquad X_{2,3} = Y_{2,3} + 7 = 4 \pm \sqrt{3}i.$$

Remarque générale

Il faut noter que le théorème fondamental de l'algèbre ne donne aucune méthode pour calculer les racines d'un polynôme quelconque.

Galois et Abel ont même démontré qu'il n'existe aucune formule générale pour un polynôme quelconque de degré $\geqslant 5$.

Chapitre 2

Suites réelles et séries numériques

2.1 Suites réelles

2.1.1 Définitions

Définition 2.1 (Suite)**.** Une **suite réelle** est une suite

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots$$

de nombres réels, l'indice parcourant tous les nombres entiers. Ce n'est donc rien d'autre qu'une fonction

$$a : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

où l'on note a_n plutôt que $a(n)$. L'élément a_n est appelé le *terme général* de la suite qui est défini en fonction de n.
La suite, c'est-à-dire l'ensemble de tous les termes, est notée $\{a_n\}$.

Exemple 2.2.

1. La formule
$$a_n = \frac{9n-20}{n^2}$$
définit une suite dont les premiers termes sont
$$a_1 = -11, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{7}{9}, \quad a_4 = 1, \quad a_5 = 1, \ldots$$

On peut reporter les valeurs a_n sur la droite réelle. Les points obtenus sont appelés les points ou les nombres de la suite.

Définition 2.3.

1. Une suite est *constante* si le terme général ne dépend pas de n.
   Par exemple la suite définie par $a_n = \sqrt{3}$ est constante.
2. Une suite $\{a_n\}$ est *bornée* si tous les points de la suite se situe dans un intervalle $[-M; M]$ pour un $M \in \mathbb{R}_+$. Autrement dit si $|a_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Exemple : La suite définie par $a_n = \frac{1}{n}$ est bornée car $|a_n| \leqslant 1$.

3. Une suite $\{a_n\}$ est <u>*croissante*</u> (resp. *décroissante*) si **à partir d'un indice** $n \geqslant N$, on a toujours
$$a_{n+1} \geqslant a_n \qquad \text{(resp. } a_{n+1} \leqslant a_n\text{)}$$
Exemple : reprenons l'exemple ci-dessus
$$a_n = \frac{9n-20}{n^2}.$$
Alors
$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{9(n+1)-20}{(n+1)^2} - \frac{9n-20}{n^2} \\ &= \frac{9n^3+9n^2-20n^2-9n^3-18n^2-9n+20n^2+40n+20}{n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{-9n^2+31n+20}{n^2(n+1)^2} \\ &= -\frac{(n-4)(9n+5)}{n^2(n+1)^2} < 0 \qquad \text{pour tout } n \geqslant 5. \end{aligned}$$
La suite est donc *strictement* décroissante.
4. On dira "**presque tous** les points d'une suite" = "**tous** les points **sauf un nombre fini**." = "**tous** les points à partir d'un certain indice".
C'est plus fort qu'une "infinité de points" ! !
Exemples :
1) $a_n = 5 + \frac{1000}{n}$: presque tous les points sont < 6.
2) $a_n = \sqrt{n}$: alors presque tous les points sont $\geqslant 10^{25}$.
3) $a_n = \frac{n}{1253}$: on ne peut pas dire "presque tous les points sont non entiers" car il y a une infinité de n pour lesquels $a_n \in \mathbb{N}$.

2.1.2 Convergence d'une suite

Définition 2.4 (Voisinage)**.** Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel et $a \in \mathbb{R}$. Alors l'intervalle
$$]a-\epsilon; a+\epsilon[$$
est appelé un ϵ-voisinage de a et est noté $v_\epsilon(a)$. C'est donc l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $|x-a| < \epsilon$.

Définition 2.5 (<u>suite convergente</u>)**.** On dit qu'une suite $\{a_n\}$ **converge vers** a si tout ϵ-voisinage de a contient presque tous les points de la suite.
Autrement dit, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N = N_\epsilon$ dépendant de ϵ, tel que
$$|a_n - a| < \epsilon \qquad \forall n > N_\epsilon.$$
On note alors
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Exemples 2.6.

1) La suite définie par $a_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0. En effet

$$|a_n - 0| < \epsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Longleftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}.$$

On choisit donc $N_\epsilon = \mathrm{E}(\frac{1}{\epsilon})$ et on est assuré que dès que $n > N_\epsilon$, alors $|a_n| < \epsilon$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Remarque 2.7. Pour tout nombre réel r, $E(r)$ désigne **la partie entière** de r, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à r. Exemple : $E(17.432) = 17$.

2) $a_n = \dfrac{9n-20}{n^2}$. Alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. Alors

$$|a_n - 0| = \left|\frac{9n-20}{n^2}\right| < \frac{9n}{n^2} = \frac{9}{n} < \epsilon$$

dès que $n > \frac{9}{\epsilon}$. Il suffit donc de prendre

$$N_\epsilon = E\left(\frac{9}{\epsilon}\right) + 1.$$

3) Soit $a_n = q^n$ avec $|q| < 1$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Démonstration : On utilise l'inégalité de Bernoulli :

$$\boxed{(1+x)^n \geqslant 1 + nx \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1;\infty[.}$$

Démonstration de l'inégalité de Bernoulli : On procède par récurrence.

1) Si $n = 0$, on a bien $(1+x)^0 = 1 \geqslant 1 + 0 \cdot x = 1$.
2) Supposons que $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ et montrons l'inégalité pour $n+1$.

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

□

Revenons à la suite $a_n = q^n$:
Si $q = 0$, on a $a_n = 0$ pour tout n et la suite converge donc vers 0.
Si $q \neq 0$, on écrit $|q| = \frac{1}{1+h}$ avec $h > 0$. Alors

$$|a_n| = |(\frac{1}{1+h})^n| = \frac{1}{(1+h)^n} \leqslant \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}.$$

Donc $|a_n| < \epsilon$ dès que $nh > \frac{1}{\epsilon}$ i.e. dès que $n > \frac{1}{\epsilon h}$. On pose donc $N_\epsilon = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\epsilon h}\right)$. □

4) Montrons que si la suite $\{a_n\}$ $(a_n > 0)$ converge vers a, alors $\{\sqrt{a_n}\}$ converge vers $\sqrt{a}$. On peut supposer $a \neq 0$. On a $(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a}) = a_n - a$ ce qui donne

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leqslant \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\epsilon'}{\sqrt{a}} = \epsilon.$$

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Exemples 2.8.

1) $a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$. On a

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 1, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = -1, \quad a_7 = 0, \ldots$$

Il y a une infinité de points en -1 mais aussi en 0 et en 1. Il n'y a donc pas "presque tous les points en -1".

2) Soit

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1} = (-1)^n \frac{n+1-1}{n+1} = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Si n est pair, on est dans le voisinage de 1. Sinon, la suite est dans le voisinage de -1. Pas de limite. Les points 1 et -1 sont des **points d'accumulation**.

Définition 2.9 (Points d'accumulation)**.** Un point a de la droite réelle est un *point d'accumulation* de la suite $\{a_n\}$ si tout ϵ-voisinage de a contient une infinité de points de la suite.

Exemples 2.10.
Dans l'exemple 1) ci-dessus, les points -1, 0 et 1 sont des points d'accumulation.
Dans l'exemple 2) -1 et 1 le sont.

ATTENTION : contenir une infinité de points $\neq$ contenir presque tous les points (+ fort)

Limite impropre

Considérons la suite

$$a_n = \frac{n^2+1}{n+1}.$$

Après division euclidienne, on obtient que

$$a_n = n - 1 + \frac{2}{n+1}.$$

Ainsi les a_n deviennent aussi grands que l'on veut lorsque n augmente. On dit que a_n tend vers l'infini.

Définition 2.11. La suite $\{a_n\}$ **tend vers l'infini** si pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $N_r \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait $a_n > r$ dès que $n > N_r$ (presque tous les points de la suite sont à droite de r). On note alors

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

On a une définition analogue pour la limite vers $-\infty$.

Exemple 2.12. $a_n = (-1)^n\sqrt{n}$. Cette suite ne converge pas, même pas vers l'infini.

2.1.3 Propriétés de convergence des suites

(I) Toute suite convergente est bornée. En d'autres termes, si $\{a_n\} \longrightarrow a$, alors $|a_n| \leqslant M$ pour un certain $M \in \mathbb{R}$.

(II) Une suite convergente n'a qu'**un seul point d'accumulation**.

(III) Si $\{a_n\} \longrightarrow a$ et $\{b_n\} \longrightarrow b$, alors

$$\{\alpha a_n + \beta b_n\} \longrightarrow \alpha a + \beta b \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(IV) Si $\{a_n\} \longrightarrow a$ et $\{b_n\} \longrightarrow b$, alors $\{a_n b_n\} \longrightarrow ab$. Autrement dit

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

si ces limites existent.

DÉMONSTRATION :
Par (I), il existe M tel que $|a_n| < M$ et $|b_n| < M$.
Soit $\epsilon > 0$. Posons $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{2M}$. Par hypothèse,

$$|a_n - a| < \epsilon' \quad \text{pour } n > N_1(\epsilon') \qquad \textit{et} \qquad |b_n - b| < \epsilon' \quad \text{pour } n > N_2(\epsilon').$$

Posons $N = \max(N_1; N_2)$. Alors, pour tout $n > N$, on a

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\ &\leqslant |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| \\ &\leqslant |M| \cdot (|b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &\leqslant M\epsilon' + M\epsilon' = 2M\epsilon' = \epsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre que la suite $a_n b_n$ converge vers ab. □

Exemple 1 : soit $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemple 2 : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$.
En effet,

$$\sqrt[n]{n^p} = \underbrace{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdots \sqrt[n]{n}}_{p \text{ fois}}.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^p = 1^p = 1.$$

(V) Si $\{a_n\} \longrightarrow a$ et $\{b_n\} \longrightarrow b$ avec $b_n \neq 0 \neq b$ alors

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow \frac{a}{b}.$$

Exemple : $a_n = \dfrac{(3n+2)(n+3)}{n^2+n+1}$. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$? $(= \frac{\infty}{\infty})$. On a

$$a_n = \frac{3n^2+11n+6}{n^2+n+1} = \frac{n^2(3+\frac{11}{n}+\frac{6}{n^2})}{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{3+\frac{11}{n}+\frac{6}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{1} = 3.$$

(VI) Toute suite **monotone** et **bornée** est convergente
Si elle est croissante, elle converge vers $a = \sup\limits_n a_n$.
Si elle est décroissante, elle converge vers $a = \inf\limits_n a_n$.

Démonstration : Faisons la preuve pour $\{a_n\}$ bornée et croissante :

$\{a_n\}$ bornée implique $|a_n| \leqslant M$.

$$\Longrightarrow a = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \quad \text{existe} \qquad \text{(cf. chapitre 1)}$$
$$\text{avec } a_n \leqslant a \qquad \text{pour tout } n$$
$$\text{et il existe } n' \text{ avec } a_{n'} > a - \epsilon.$$

Mais $\{a_n\}$ est croissante. Donc

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \forall n > n' \qquad a_n \geqslant a_{n'} > a - \epsilon \\
&\Longrightarrow a - \epsilon < a_n \leqslant a < a + \epsilon \\
&\Longrightarrow |a_n - a| < \epsilon \qquad \forall n > n' =: N_\epsilon \\
&\Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a = \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}.}
\end{aligned}$$

□

(VII) Soit $\{a_n\}$ une suite bornée et $\{b_n\}$ une suite convergeant vers 0.
Alors la suite $\{a_n b_n\}$ converge vers 0.
Exemple : $a_n = \dfrac{1}{n} \cdot \sin n$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Théorème 2.13 (Théorème des gendarmes pour les suites)**.** *Soient* $\{a_n\}$, $\{u_n\}$ *et* $\{v_n\}$ *trois suites satisfaisant les 2 propriétés suivantes :*

(i) il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ *avec* $u_n \leqslant a_n \leqslant v_n$ *pour tout* $n > N_0$ *;*

(ii) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = L$.

Alors

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Démonstration : Comme $\lim_{n\to\infty} u_n = L$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $-\epsilon < u_n - L < \epsilon$ pour tout $n > N_1$. De même, il existe $N_2(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $-\epsilon < v_n - L < \epsilon$ pour tout $n > N_2$. Alors si $N(\epsilon) = \max(N_0, N_1, N_2)$, on a pour tout $n > N$

$$-\epsilon < u_n - L \leqslant a_n - L \leqslant v_n - L < \epsilon$$

ce qui donne $|a_n - L| < \epsilon$ pour tout $n > N(\epsilon)$. □

Exemple 2.14. soit $a_n = \sqrt[n]{n}$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Démonstration :

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geqslant 1 + \frac{n}{\sqrt{n}} = 1 + \sqrt{n} \geqslant \sqrt{n} \geqslant 1.$$

Donc

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n} \geqslant n \geqslant 1$$

ce qui implique, en prenant la racine n-ième :

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \geqslant \sqrt[n]{n} \geqslant 1$$

Par le théorème des gendarmes, on a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Théorème 2.15 (Critère de d'Alembert)**.** *Soit* $\{a_n\}$ *une suite réelle telle que* $l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *existe. Alors*

1. *si* $l < 1$, *la suite* $\{a_n\}$ *converge vers 0 ;*
2. *si* $l > 1$, *la suite* $\{a_n\}$ *diverge.*

Démonstration :
1. Par hypothèse, à partir d'un certain indice N, on a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \rho < 1$. Donc

$$|a_{n+1}| \leqslant \rho \cdot |a_n|$$

Par récurrence, ceci implique que

$$0 \leqslant |a_{N+n}| \leqslant \rho^n \cdot |a_N|.$$

Comme $\rho < 1$ la suite ρ^n converge vers 0 (exemple ci-dessus). Le théorème des gendarmes implique que

$$\lim_{n\to\infty} |a_{N+n}| = \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Donc $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
2. A partir d'un certain indice N, on a

$$|a_{n+1}| \geqslant \rho \cdot |a_n|$$

avec $\rho > 1$. Donc on a, par récurrence, $|a_{N+n}| \geqslant \rho^n \cdot |a_N|$.
Ceci montre que a_{N+n} n'est pas majorée. La suite $\{|a_n|\}$ diverge donc et à fortiori la suite $\{a_n\}$ aussi.

$\square$

Exemple 2.16. Considérons la suite $a_n = \dfrac{1000^n}{n!}$. On a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{1000^n} = \frac{1000}{n+1}$$

qui converge vers 0 lorsque $n \to \infty$. Donc $l = 0$. Le critère de d'Alembert implique que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.1.4 Sous-suites et points d'accumulation

Définition 2.17 (Sous-suite)**.** Soit $\{a_n\}$ une suite réelle et $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers. Alors $\{a_{n_k}\}$ est une **sous-suite** de $\{a_n\}$.

On a alors la reformulation suivante :

Un point d'accumulation = la limite d'une sous-suite convergente

Exemple 2.18.
Reprenons la suite $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$.
Déjà vu : 2 points d'accumulation qui sont -1 et 1.
Sous-suite d'indice pairs : $a_{2k} = (-1)^{2k}\dfrac{2k}{2k+1} = \dfrac{2k}{2k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 1$
Sous-suite d'indice impairs : $a_{2k-1} = (-1)^{2k-1}\dfrac{2k-1}{2k} = -\dfrac{2k-1}{2k} \xrightarrow{k\to\infty} -1$

2.1.5 Suites de Cauchy

Définition 2.19. Une suite $\{a_n\}$ est une *suite de Cauchy* si $\forall \epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$|a_n - a_m| < \epsilon \qquad \forall\, n, m > N_\epsilon$$

Théorème 2.20. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Sans démonstration.

La réciproque est vraie dans $\mathbb{R}$: toute suite de Cauchy est convergente. On dit alors que $\mathbb{R}$ est **complet**.

C'est une propriété fondamentale des nombres réels que ne possède pas $\mathbb{Q}$: on peut trouver une suite $\{q_n\}$ de nombres rationnels qui soit une suite de Cauchy mais qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ (mais bien dans $\mathbb{R}$) (cf. exemple 2.24).

2.2 Suites récurrentes

Définition 2.21. Une suite est dite récurrente si a_{n+1} est définie à partir de a_n, c'est-à-dire si

$$\boxed{a_{n+1} = g(a_n).}$$

Exemple 2.22. $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1+a_n}$. Alors

$$a_2 = \frac{4}{3} \qquad a_3 = \frac{2 \cdot 4/3}{1+4/3} = \frac{8}{7} \qquad a_4 = \frac{16}{15}, \quad \textit{etc...}$$

2.2.1 Méthodes pour trouver la limite d'une suite récurrente

1ère méthode

On essaie de se ramener à une suite non-récurrente en exprimant le terme général comme une fonction de n, $a_n = f(n)$, et non plus de a_{n-1}.

Exemple : Dans l'exemple ci-dessus, on constate que

$$a_n = \frac{2^n}{2^n - 1}.$$

On démontre cette formule par récurrence.
1) si $n = 1$, on a bien $a_1 = \frac{2}{1} = 2$: ok.
2) Supposons la formule vraie pour n. Alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{2a_n}{1+a_n} = \frac{2 \cdot \frac{2^n}{2^n-1}}{1+\frac{2^n}{2^n-1}} \qquad\qquad | \cdot 2^n - 1 \\ &= \frac{2^{n+1}}{2^n - 1 + 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}. \end{aligned}$$

On peut alors calculer la limite :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 2^{-n}} = 1.$$

2ème méthode

On démontre d'abord que la suite converge et le cas échéant on passe à la limite dans l'équation $a_{n+1} = g(a_n)$ ce qui donne à résoudre l'équation

$$\boxed{a = g(a).}$$

Pour démontrer que la suite converge, on peut en général essayer de démontrer que
(A) la suite est monotone
(B) la suite est bornée

Remarque 2.23. Toute suite croissante (resp. décroissante) est forcément minorée (resp. majorée).
Conclusion : pour montrer qu'une suite croissante (resp. décroissante) est convergente, il suffit de montrer qu'elle est majorée (resp. minorée).

Exemple : Reprenons la suite précédente : $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n}$.

On constate d'abord que $a_n > 0$ pour tout n.
(A) On montre, par récurrence, que $a_n > 1$ pour tout n.
1) C'est vrai pour $n = 1$.
2) Supposons $a_n > 1$. On doit montrer que $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1+a_n} > 1$. Or, puisque $1 + a_n > 0$, on a

$$\frac{2a_n}{1+a_n} > 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2a_n > 1 + a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n > 1.$$

Or ceci est vrai par hypothèse de récurrence. Donc $a_{n+1} > 1$.
(B) Montrons ensuite, par récurrence, que la suite est décroissante, c'est-à-dire que $a_{n+1} < a_n$:
1) $n = 1$: on a bien $a_2 < a_1$
2) Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $a_{n+1} < a_n$ et montrons que $a_{n+2} < a_{n+1}$. On a

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{2a_{n+1}}{1+a_{n+1}} - \frac{2a_n}{1+a_n} = \frac{2a_{n+1}(1+a_n) - 2a_n(1+a_{n+1})}{(1+a_{n+1})(1+a_n)} \\ &= \frac{2(a_{n+1} - a_n)}{(1+a_{n+1})(1+a_n)} < 0. \end{aligned}$$

La suite est donc décroissante. Comme elle est minorée, elle converge donc.

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n} \quad \xrightarrow{\text{limite}} \quad a = \frac{2a}{1+a} \Longleftrightarrow a^2 + a = 2a \Longleftrightarrow a(a-1) = 0.$$

Cette équation a 2 solutions $a = 0$ et $a = 1$. Comme $a_n > 1$ pour tout n, la limite ne peut être que $a = 1$.

ATTENTION : cette 2ème méthode de calcul fonctionne parce que l'on a démontré que la limite existe.

Contre-exemple : soit $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$. On a

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = \frac{1}{2}, \quad a_5 = 2, \ldots$$

Cette suite ne converge pas (2 points d'accumulations) mais si l'on passe à la limite dans la formule de définition, on obtient

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \xrightarrow{\text{limite}} a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou} a = -1\,!!!!$$

Exemple 2.24. Soit $r > 0$ un nombre réel strictement positif. Considérons la suite définie par

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{r}{a_n}\right)$$

et $a_1 \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{r}.$$

Si r et a_1 sont dans $\mathbb{Q}$, on a une suite de nombres rationnels qui converge vers $\sqrt{r}$.

DÉMONSTRATION : On a clairement que $a_n > 0$ pour tout n car $a_1 > 0$. De plus
1. $a_{n+1}^2 \geqslant r$ car

$$a_{n+1}^2 - r = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + \frac{r^2}{a_n^2} + 2r\right) - r = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{r}{a_n}\right)^2 \geqslant 0.$$

2. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{r}{a_n}) - a_n = \dfrac{1}{2}(\dfrac{r}{a_n} - a_n) = \dfrac{1}{2a_n}(r - a_n^2) \leqslant 0$ pour $n \geqslant 2$.
La suite est donc décroissante.
Comme $a_n \geqslant 0$, elle est aussi bornée. La suite converge donc et on peut passer à la limite dans la définition :

$$a = \frac{1}{2}(a + \frac{r}{a}).$$

Ceci donne $2a^2 = a^2 + r$ et donc $a = \sqrt{r}$. □

Application numérique : pour $r = 2$ et $a_1 = 1$, on trouve

$$a_2 = \frac{3}{2} \quad a_3 = \frac{17}{12} \quad a_4 = \frac{577}{408} \quad a_5 = \frac{665857}{470832} = 1.414213562 \quad \text{(8 décimales correctes).}$$

Exemple 2.25. Soit la suite définie par

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 4)$$

et $a_1 = 1$. Montrons d'abord que la suite est bornée et croissante.

(A) On a $a_1 < 2$ et par récurrence $a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{4} < 1 + 1/2 < 2$. De plus, on a clairement $a_n > 0$. Donc la suite est bornée.

(B) Montrons, par récurrence, qu'elle est croissante :
1) on a $1 = a_1 < a_2 = \dfrac{5}{4}$.
2) supposons $a_n < a_{n+1}$. Alors $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_{n+1} + 4) - \frac{1}{4}(a_n + 4) = \frac{1}{4}(a_{n+1} - a_n) > 0$.

La suite est donc croissante et bornée $\Longrightarrow$ la limite existe. Notons a cette limite. Alors $a = \dfrac{1}{4}(a + 4)$ devient $4a = a + 4$ donc $a = \frac{4}{3}$.

2.3 Séries

Définition 2.26. Soit $\{b_n\}$ une suite réelle. On note

$$\sum_{k=1}^{n} b_k := b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Si l'indice k parcourt tout $\mathbb{N}^*$ (ou $\mathbb{N}$) alors la somme est infinie et on parle de **série** :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

b_k est le *terme général* de la série.

2.3.1 Convergence d'une série

Définition 2.27. Posons

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

On a $s_{n+1} = s_n + b_{n+1}$.

La suite $\{s_n\}$ est une suite récurrente, appelée la suite des sommes partielles.

On dit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ **converge vers** s si la suite $\{s_n\}$ converge vers s. On note alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Sinon on dit que la **série diverge**.

Condition nécessaire de convergence

Pour que la série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, il faut que $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$. En effet si la suite $\{s_n\}$ converge vers s, alors

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_n + b_{n+1}) = s + \lim_{n\to\infty} b_{n+1}.$$

On doit donc avoir

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} b_n = 0.}$$

Mais **cette condition n'est pas suffisante** comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.28 (Série harmonique)**.** Posons $b_k = \dfrac{1}{k}$. La série $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ est appelée la **série harmonique**. La suite des sommes partielles est

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

On a bien $b_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Mais la suite $\{s_n\}$ diverge.

DÉMONSTRATION :
1) La suite $\{s_n\}$ est croissante.
2) Considérons les termes s_1, s_2, s_4, s_8, …, s_{2^k}.

$$s_1 = 1 \qquad s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$
$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \qquad s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{8}.$$

Alors

$$s_4 = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

$$s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_4 + \underbrace{(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8})}_{=\frac{1}{2}} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}.$$

De manière générale, on a

$$s_{2^k} > 1 + k \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow \infty.$$

La suite s_{2^k} n'est pas majorée ce qui implique que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) = \infty.$$

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ est donc divergente.}}$$

Exemple 2.29 (La série géométrique)**.** Soit $r \in \mathbb{R}$. Posons $b_k = r^k$ et considérons la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots \qquad \text{(ici, on débute à } k = 0\text{)}$$

Alors

$$s_0 = 1 \qquad s_1 = 1 + r \qquad s_2 = 1 + r + r^2 \qquad s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$

On sait que

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \qquad \text{car} \quad (1 - r)(1 + r + r^2 + \cdots + r^n) = 1 - r^{n+1}$$

Quelle est alors la limite ?

Si $|r| \geqslant 1$ alors la suite s_n diverge car $|r^{n+1}| \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

En revanche, pour $|r| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ (voir exemple 3 sous 2.6) et donc

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

En conclusion, la série géométrique

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \quad \begin{cases} \text{diverge si } |r| \geqslant 1 \\ \text{converge vers } \dfrac{1}{1-r} \text{ si } |r| < 1 \end{cases}$$

Le nombre r est appelé la **raison** de la série géométrique.

Exemple 2.30. La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

diverge (et ne converge donc pas vers 0) car la suite des sommes partielles est 1 ; 0 ; 1 ; 0 ; 1 ; . . .

2.3.2 Propriétés des séries

(I) Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s$, alors $\sum_{k=1}^{\infty} cb_k = cs$.

(II) Si $s = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ et $s' = \sum_{k=1}^{\infty} b'_k$ alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha b_k + \beta b'_k = \alpha s + \beta s'$$

(linéarité de la convergence.)

(III) La propriété de convergence ou de divergence n'est pas modifiée si l'on ajoute (ou retranche) un nombre fini de termes. Par exemple, la série

$$\sum_{k=100}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots$$

diverge encore (série harmonique).

2.3.3 Séries à termes positifs

Notons $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ les séries avec $u_k \geqslant 0 \quad \forall k$.

(A) Critères de comparaison

Supposons que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n > N$.

(a) Si $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ converge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge également ; ($\{s_n\}$ = suite croissante majorée) ;

(b) si $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ diverge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ diverge aussi. (suite croissante non majorée).

Exemple 2.31.
La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha \leqslant 1$ diverge.
En effet, on a $k^\alpha = k^{1-\delta}$ avec $\delta \geqslant 0$ et donc $k^\alpha \leqslant k$ ce qui implique que

$$\frac{1}{k^\alpha} \geqslant \frac{1}{k}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge, le critère de comparaison nous permet de conclure à la divergence de la série considérée. □

(B) Critère de la racine (ou de Cauchy)

Si pour tout $n \geqslant N$, on a $\boxed{\sqrt[n]{u_n} \leqslant q < 1}$ (q fixé) alors la série $\sum u_k$ converge.

Si $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$, la série diverge car $u_n \not\to 0$.

DÉMONSTRATION :
On a $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q < 1$ donc $u_n \leqslant q^n$. Or la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k$$

converge (série géométrique) puisque $q < 1$. Par le critère de comparaison, la série $\sum u_k$ converge également.

$\square$

(C) Critère du quotient (ou de d'Alembert)

Si pour tout $n \geqslant N$, on a $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q < 1}$ (q fixé) alors la série $\sum u_k$ converge.

Si on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la série diverge.

DÉMONSTRATION :
On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q \qquad \text{et} \qquad \frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant q$$

et donc

$$u_{n+1} \leqslant u_n \cdot q \leqslant u_{n-1} \cdot q^2 \leqslant \cdots \leqslant q^n \cdot u_1.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_1 \cdot q^k$ converge. Par le critère de comparaison, il en est de même de la série $\sum u_k$. $\square$

Corollaire 2.32 (Résumé-corollaire)**.** *Soient*

$$q_1 := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \qquad \textit{et} \qquad q_2 := \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$\textit{Alors la série } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \begin{cases} \textit{converge si } q_i < 1 \\ \textit{diverge si } q_i > 1 \\ \textit{on ne peut rien dire si } q_i = 1. \end{cases}$$

Exemples 2.33.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10}}{3^k}$

   On a $\displaystyle\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{10}}{3^n}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[n]{n^{10}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} < 1$. La série converge.

2. La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$ $(a > 0)$ converge. En effet, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} < q < 1$$

   si n est assez grand. (On verra plus tard qu'elle converge vers e^a).

Exemples 2.34 (Autres exemples)**.**

(a) Considérons la série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$.

Alors on a $b_k = \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ pour tout $k \geqslant 2$ et donc

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} b_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$ ce qui démontre que $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1$.

(b) Considérons maintenant la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. On a $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)}$ pour tout $k \geqslant 2$.

Le critère de comparaison et l'exemple (a) ci-dessus permet de conclure que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge. On a de plus

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 = 2.$$

Corollaire 2.35. *La série* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ *avec* $\alpha \geqslant 2$ *converge car* $\dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ *(critère de comparaison).*

Pour $1 < \alpha \leqslant 2$, la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge également.

Remarque 2.36. Dans l'exemple (b) ci-dessus, les critères de la racine et du quotient ne donnent rien. En effet, on a

$$q_1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1$$

et

$$q_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1.$$

De même, pour la série harmonique, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, ces critères ne donnent rien. On a

$$q_1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

De même pour le critère du quotient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

ATTENTION : on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ mais PAS $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q < 1$ car $q_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Et la série harmonique diverge.

2.3.4 Séries alternées

Soit u_n de signe constant. La série

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}u_k = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$$

est dite *série alternée.*

Théorème 2.37 (**Critère de Leibniz**). *Si*

(i) $|u_{n+1}| < |u_n|$ *et*

(ii) $|u_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

alors la série alternée converge.
De plus elle converge vers S *avec* $|S| \leqslant |u_1|$.

Démonstration : On peut supposer tous les u_k positifs. L'hypothèse devient alors $u_k > u_{k+1}$ et donc $u_k - u_{k+1} > 0$. D'où

$$\begin{aligned} s_{2n} &= u_1 - u_2 + u_3 - \dots + u_{2n-1} - u_{2n} \qquad \text{et} \\ s_{2n+2} &= u_1 - u_2 + u_3 - \dots + \underbrace{u_{2n+1} - u_{2n+2}}_{>0} > s_{2n}. \end{aligned}$$

Ainsi la suite $\{s_{2n}\}$ est croissante. Par ailleurs, on a

$$s_{2n} = u_1 - (\underbrace{u_2 - u_3}_{>0}) - \dots - (\underbrace{u_{2n-2} - u_{2n-1}}_{>0}) - u_{2n} < u_1.$$

La suite $\{s_{2n}\}$ est donc aussi bornée. Elle converge donc. Posons

$$S = \lim_{n\to\infty} s_{2n}.$$

On a alors

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1} \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} S + 0 = s.$$

La suite $\{s_{2n+1}\}$ converge également vers S ce qui montre que $\{s_n\}$ converge vers S.
Comme $s_{2n} < u_1$, on a bien $S < u_1$. □

Exemples 2.38.

1. La **série harmonique alternée** (ou **série de Leibniz**)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots\dots$$

converge. (On verra que c'est vers $\ln 2$.)

2.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{2+\sqrt{k}}{k}$$

On a

$$u_n = \frac{2+\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

et

$$u_n = \frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2+\sqrt{n+1}}{n+1} = u_{n+1}.$$

Les hypothèses (i) et (ii) du théorème sont remplies : la série converge.

Remarque 2.39. La condition (ii) $u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ne suffit pas.
Exemple : la série alternée

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \frac{1}{36} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k$$

avec

$$u_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } k \text{ est impair} \\ \frac{1}{k^2} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

satisfait bien la condition (ii) ($u_k \longrightarrow 0$) mais ne converge pas. En effet, soit n pair. Alors

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} u_k = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{n^2} \\ &= \underbrace{(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1})}_{s_n^+} - \underbrace{(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{n^2})}_{s_n^-}. \end{aligned}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, le terme s_n^- est majoré par un nombre $M \in \mathbb{R}$ indépendant de n.
Comme la série harmonique diverge, le terme s_n^+ est plus grand que tout $r \in \mathbb{R}$ pour n assez grand. Ainsi, pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $N_r \in \mathbb{N}$ tel que $s_n^+ > r$ dès que $n > N_r$.
Ceci implique que $s_n = s_n^+ - s_n^- > r - M$. Ainsi la sous-suite s_n (n pair) est non majorée et donc non convergente. □

2.3.5 Série absolument convergente

Définition 2.40. Soit $\sum b_k$ une série σ donnée. Si la série

$$|\sigma| := \sum |b_k|$$

converge, on dit que σ est absolument convergente.

Théorème 2.41. *Si $|\sigma|$ converge, alors σ converge également.*

Conclusion : les critères pour les séries à termes positifs (cf. 2.3.3) sont applicables aux séries absolument convergentes.

Exemple : la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$ est absolument convergente pour tout $a \in \mathbb{R}$. En effet, on a

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{|a|}{n} \longrightarrow 0 \qquad \text{(critère du quotient)}$$

Définition 2.42 (Série semi-convergente)**.** Une série $\sum b_k$ convergente mais dont la série $\sum |b_k|$ diverge est appelée **semi-convergente**.

Exemple : La série harmonique alternée $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ est convergente mais pas absolument convergente puisque la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge. Elle est donc semi-convergente.

Théorème 2.43.
1) La somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre de ses termes.
2) En revanche, dans le cas d'une série semi-convergente, on peut faire converger la somme de la série vers n'importe quel nombre réel en regroupant les termes de la série d'une façon bien choisie.

Sans démonstration.

Corollaire 2.44. *Si $\sum_k a_k$ est absolument convergente alors*

$$\sum_l a_l + \sum_m a_m$$

(où les a_l et a_m forment l'ensemble de tous les a_k) sont séparément absolument convergentes.

Exemple : Calculons

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k(k+2)} \qquad \text{(série alternée).}$$

Cette série est absolument convergente car

$$|u_k| = \frac{1}{k(k+2)} < \frac{1}{k^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.
On peut alors séparer les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs :

$$\begin{aligned} s &= \sum_{k=1,\ \text{impairs}}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} + \sum_{k=2,\ \text{pairs}}^{\infty} (-1) \cdot \frac{1}{k(k+2)} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)(2l+1)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m(2m+2)} \\ &= \underbrace{\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2l-1} - \frac{1}{2l+1} \right)}_{s_l^+} - \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)}}_{s_m^-} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

car

$$s_l^+ = \frac{1}{2} \left[(1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \cdots + (\frac{1}{2l-1} - \frac{1}{2l+1}) \right] = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2l+1}) \xrightarrow{l \to \infty} \frac{1}{2}$$

$$s_m^- = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{m(m+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = 1 - \frac{1}{m+1} \xrightarrow{m \to \infty} 1$$

Exemple 2.45. La série harmonique alternée est semi-convergente. <u>On ne peut pas changer l'ordre des termes sans changer la valeur de la somme (infinie).</u>

$$\begin{aligned}
ln(2) &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\sum_k(-1)^{k+1}\frac{1}{k} \qquad |\cdot 2\\
2ln(2) &= 2-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{2}{10}+\dots\\
&= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots\\
&= ln(2).
\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$2ln(2) = ln(2)!!!!!!!!!!$$

2.4 Définition du nombre e

Soit $b_0 = 1$ et $b_k = \dfrac{1}{k!}$. (Nous démarrons ici avec $k = 0$.)

Considérons la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ et notons $\{e_n\}$ la suite des sommes partielles, c'est-à-dire

$$e_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

Nous avons vu dans l'exemple 2.33 que cette série est absolument convergente. Sa limite est notée e :

$$\boxed{e := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}).}$$

Numériquement : $e = 2,718281828$.

Théorème 2.46. *Le nombre e est irrationnel.*

Démonstration :
Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
e &= 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)\,!}+\frac{1}{(n+2)\,!}+\dots\\
&= 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots\right)}_{<1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\dots\dots=\frac{1}{1-1/n}=\frac{n}{n-1}\leqslant 2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\cdot\beta_n \qquad \text{avec } 1<\beta_n<2. \quad (*)$$

Supposons maintenant que e soit rationnel c'est-à-dire que $e = \frac{M}{N}$. Si l'on pose $n = N+1$ dans (*), on obtient

$$\frac{M}{N} = 1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N!}+\frac{1}{(N+1)!}\cdot\beta_{N+1} \qquad |\cdot(N+1)!$$

$$\underbrace{M(N+1)(N-1)!}_{\in\mathbb{N}} = \underbrace{(N+1)!+(N+1)!+(N+1)N(N-1)\cdots 3+\cdots+(N+1)}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{\beta_{N+1}}_{\notin\mathbb{N}}.$$

On aboutit ainsi à une contradiction. □

Autre définition de e

Considérons la suite $\{e'_n\}$ définie par

$$\boxed{e'_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.}$$

Proposition 2.47. $\lim\limits_{n\to\infty} e'_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

> ATTENTION : une limite de la forme 1^∞ est une forme indéterminée. Elle ne vaut pas 1 mais peut prendre, a priori, toutes les valeurs possibles comme une limite de la forme $\frac{0}{0}$

Démonstration : Par la formule du binôme, on a

$$\begin{aligned}
e'_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\,n^k}\\
&= 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\leqslant 1}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{\leqslant 1}\cdots\underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{\leqslant 1} \qquad (*)\\
&\leqslant 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k\,!} = e_n
\end{aligned}$$

On a ainsi montré que $\boxed{e'_n \leqslant e_n}$ pour tout n. Reprenons le calcul précédent à la ligne (*) :

$$\begin{aligned}
e'_n &= 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\geqslant 1-\frac{k-1}{n}}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{\geqslant 1-\frac{k-1}{n}}\cdots\underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{\geqslant 1-\frac{k-1}{n}}\\
&\geqslant 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^k
\end{aligned}$$

L'inégalité de Bernoulli donne

$$\begin{aligned}
&\geqslant 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k(k-1)}{n}\right) = \underbrace{1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}}_{=e_n}-\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{k!}\\
&= e_n-\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!}\\
&= e_n-\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{j!} = e_n-\frac{1}{n}e_{n-2}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$e_n - \frac{1}{n}e_{n-2} \leqslant e'_n \leqslant e_n.$$

Les suites e_n et $e_n - \frac{1}{n}e_{n-2}$ convergent toutes les deux vers e. Ainsi, par le théorème des gendarmes, on a aussi $\lim\limits_{n\to\infty} e'_n = e$. □

La convergence de cette suite $\{e'_n\}$ est beaucoup plus lente que la précédente.
Pour avoir $e = 2.7180..$, il faut $n = 6$ dans e_n mais $n = 4819$ dans e'_n.

Remarque 2.48. On peut généraliser cette démonstration pour montrer que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriétés

1.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}.}$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1}\\ &= \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]^{-1} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} (e\cdot 1)^{-1} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

□

2. Si $\{a_n\}$, $a_n > 0$ est une suite rationnelle nulle (c'est-à-dire qui converge vers 0) alors

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e.}$$

Démonstration : En posant $N = E(\frac{1}{a_n})$, on a $N \leqslant \frac{1}{a_n} < N+1$ et alors

$$\underbrace{(1+\frac{1}{N+1})^N}_{(1+\frac{1}{N+1})^{N+1}\cdot(1+\frac{1}{N+1})^{-1}} < (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} < \underbrace{(1+\frac{1}{N})^{N+1}}_{(1+\frac{1}{N})^N(1+\frac{1}{N})}.$$

Si on prend la limite quand $N \longrightarrow \infty$ (alors $a_n \longrightarrow 0$) on a

$$e\cdot 1 \leqslant (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \leqslant e\cdot 1.$$

3. On a

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{q}{n})^n = e^q \qquad \forall q\in\mathbb{Q}.}$$

C'est la définition numérique de e^q.

Démonstration :
Si $q=0$ c'est trivial. Si $q>0$ on applique le point 2. avec $a_n=\frac{q}{n}$. On a alors

$$(1+\frac{q}{n})^n = \left((1+\frac{q}{n})^{n/q}\right)^q \xrightarrow{n\to\infty} e^q.$$

Si $q<0$, l'argument est analogue à celui du point 1.

Exemple : Calculons

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n.$$

On a

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e^{-1}}{e} = \frac{1}{e^2}.$$

La fonction e^x

Nous avons démontré que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^n = e^q$ pour tout $q\in\mathbb{Q}$.
Nous avons aussi vu que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
On peut donc étendre la fonction e^x à tout $\mathbb{R}$ en posant, pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.}$$

On peut même étendre cette définition aux **nombres complexes** en posant

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} \qquad \text{pour tout } z\in\mathbb{C}.$$

Le module remplace alors la valeur absolue et cette suite est encore **absolument convergente** pour tout $z\in\mathbb{C}$..
On peut montrer les résultats suivants :

- $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ pour tout $z, z'\in\mathbb{C}$
- $\overline{e^z} = e^{\bar z}$ pour tout $z\in\mathbb{C}$
- Donc $|e^z|^2 = e^z\cdot\overline{e^z} = e^z\cdot e^{\bar z} = e^{z+\bar z} = e^{2\mathcal{R}e(z)} \implies \quad |e^z| = e^{\mathcal{R}e(z)}$.
- En particulier, si $z=i\alpha$ alors $\left|e^{i\alpha}\right| = e^0 = 1$. L'exponentielle complexe envoie l'axe imaginaire sur le cercle trigonométrique.
- Chapitre 4 $\implies \quad \arg(e^{i\alpha}) = \alpha$. On obtient les formules suivantes :

$$\boxed{e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha = [1;\alpha]}$$

et donc le nombre complexe $[r;\theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ s'écrit aussi

$$\boxed{[r;\theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.}$$

C'est la **notation d'Euler**. En particulier, en posant $\theta = \pi$ et $r = 1$ on obtient

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

2.5 Un petit résumé de quelques séries

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge (série harmonique)

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ est semi-convergente (série harmonique alternée)

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \begin{cases} \text{diverge si} & 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \\ \text{converge si} & \alpha > 1 \end{cases}$

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k \begin{cases} = \frac{1}{1-q} & \text{si } |q| < 1 \\ \text{diverge si} & |q| \geqslant 1 \end{cases}$ série géométrique

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} \begin{cases} = \frac{1}{(1-q)^2} & \text{si } |q| < 1 \\ \text{diverge si} & |q| \geqslant 1 \end{cases}$ dérivée de la série géométrique

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k\,!}$ converge absolument $\forall a \in \mathbb{R}$ et

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k\,!} = e^a = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+a}{n}\right)^n.$$

Chapitre 3

Fonctions réelles et continuité

3.1 Définitions générales

Définition 3.1.
• Soient D et T deux ensembles non vides. Une **fonction** f **de** D **dans** T est une correspondance qui associe à tout élément $x \in D$ un élément $y = f(x) \in T$. On la note par

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow T \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

• L'ensemble D est le **domaine de définition** de f. Il sera souvent noté D_f.
• L'élément $y = f(x) \in T$ est **l'image de** x **par** f alors que x est une **pré-image de** y.

• Si D et T sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, la fonction f est appelée **fonction réelle**.

• L'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) := \{y \in T \mid \exists x \in D \text{ avec } y = f(x)\}$$

est appelé l'**image de** D **par** f. On le note aussi $f(D)$.

Définition 3.2 (Fonction injective)**.** Une fonction $f : D \longrightarrow T$ est dite **injective** si tout élément de T a au plus une pré-image.
Autrement dit, si $x_1 \neq x_2$ implique $f(x_1) \neq f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in D$.

Définition 3.3 (Fonction surjective)**.** Une fonction $f : D \longrightarrow T$ est dite **surjective** si tout élément de T a au moins une pré-image.
Autrement dit, si pour tout $y \in T$, il existe $x \in D$ avec $y = f(x)$.
Ou encore, si $\mathrm{Im}(f) = T$.

Une fonction injective et surjective est dite **bijective**.

Exemples 3.4 (Quelques exemples)**.**

(1) La fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2$ est injective mais pas surjective car il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 5$. On a alors

$$\mathrm{Im}(f) = \text{ l'ensemble des carrés dans } \mathbb{N} \ = \{0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots\}.$$

(2) La fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2$ n'est pas injective car $f(-6) = f(6) = 36$.

(3) La fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est une fonction réelle. On a $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$. Elle n'est donc pas surjective. En revanche, elle est injective car si $a \neq b$ alors $\sqrt{a} \neq \sqrt{b}$. Par la suite cette fonction sera simplement notée $f(x) = \sqrt{x}$ (sous-entendu : $D_f = \mathbb{R}_+$ et $T = \mathbb{R}$).

(4) La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ est la fonction **identité**. Elle est bijective.

(5) La fonction **signe** est définie par

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On a $D_f = \mathbb{R}$. Elle n'est ni injective ni surjective.

(6) La fonction de **Heaviside** est définie par $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

3.2 Fonctions réelles

Dorénavant, toute fonction $f(x)$ sera réelle.

Quelques propriétés particulières

Une fonction réelle $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite

- *paire* si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
- *impaire* si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
- *périodique* de période T si $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
- *bornée* si $f(x) \leq M$ pour un certain $M \in R$ et pour tout $x \in D_f$.
- *croissante* (resp. strictement croissante) si

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(y) \quad (\text{resp. } f(x) < f(y))$$

- *décroissante* (resp. strictement décroissante) si

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(y) \quad (\text{resp. } f(x) > f(y))$$

- *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Composition

Soient f, g deux fonctions réelles telles que $\text{Im}(f) \subset D_g$. Alors on peut construire la fonction composée $g \circ f$ définie par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \text{pour tout } x \in D_f.$$

Exemple :

$$g(x) = \sqrt{x} \quad D_g = \mathbb{R}_+ \qquad\qquad f(x) = x^2 \quad \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$$

Alors

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Graphe d'une fonction

Le graphe d'une fonction $f(x)$ est le sous-ensemble du plan $\mathbb{R}^2$ défini par

$$G_f = \{(x\,,\, f(x)) \mid x \in D_f\}.$$

Fonction réciproque (ou fonction inverse)

Si une fonction

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow T \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

est **bijective**, on peut définir la fonction réciproque

$$f^{-1} : T \longrightarrow D$$

qui associe à tout $y \in T$ l'élément $x \in D$ tel que $f(x) = y$. On a alors

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x = (f \circ f^{-1})(x)$$

pour tout x où les expressions sont définies.

Les graphes de $f(x)$ et $f^{-1}(x)$ sont toujours symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Exemple : si $f(x) = x^2$ alors la fonction est bijective si l'on pose $D_f = R_+$. On peut donc trouver f^{-1} qui n'est rien d'autre que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

3.3 Quelques fonctions réelles élémentaires

(I) Fonctions puissances : $f(x) = x^q$ pour $q \in \mathbb{Q}$.

On a $D_f = \mathbb{R}$ si $q \in \mathbb{N}$ alors que $D_f = \mathbb{R}^*$ si $q \in \mathbb{Z}_-$.

(II) Fonctions polynômiales :

$$y = f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad a_k \in \mathbb{R}, a_n \neq 0.$$

$D_f = \mathbb{R}$
Soit $P(x)$ un polynôme (réel) et x_0 une racine de $P(x)$. Le plus grand entier m tel que $(x - x_0)^m$ divise $P(x)$ est appelé la multiplicité de x_0 par rapport à P. On note alors

$$m = mult_P(x_0).$$

(III) Fonctions rationnelles

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad D_f = \mathbb{R} \backslash \{x_k \mid Q(x_k) = 0\}.$$

Si $Q(x_k) = 0$ et $mult_Q(x_k) > mult_P(x_k)$, alors les droites $x = x_k$ sont des asymptotes verticales.

(IV) Fonctions irrationnelles : polynômes + racines
Exemple :

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt[3]{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 3x - \sqrt[3]{x/2}}}.$$

(V) Fonctions trigonométriques

$$\begin{array}{lll} f(x) = & \sin x & \text{impaire, périodique de période } T = 2\pi\text{, bornée} \\ & \cos x & \text{paire, périodique de période } T = 2\pi\text{, bornée} \\ & \tan x & \text{impaire, périodique de période } T = \pi\text{, non bornée} \\ & & D_f = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\} \end{array}$$

On a les relations suivantes : $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

(VI) Fonctions trigonométriques inverses
Pour inverser les fonctions trigonométriques, il faut se restreindre à un intervalle sur lequel elles sont monotones. On choisit les intervalles suivants :

$$\begin{array}{rcll} \sin x : & \left[-\frac{\pi}{2} \, ; \, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1 \, ; \, 1] \\ \cos x : & [0 \, ; \, \pi] & \longrightarrow & [-1 \, ; \, 1] \\ \tan x : & \left]-\frac{\pi}{2} \, ; \, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

On définit alors

$$\begin{array}{lcll} \text{arcsin :} & [-1; 1] & \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] & \text{par} \quad \arcsin(x) = \sin^{-1}(x) \\ \text{arccos :} & [-1; 1] & \longrightarrow [0; \pi] & \text{par} \quad \arccos(x) = \cos^{-1}(x) \\ \text{arctan :} & \mathbb{R} & \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[& \text{par} \quad \arctan(x) = \tan^{-1}(x) \end{array}$$

ATTENTION :
on a $\arcsin(\sin x) = x$ uniquement pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
Et $\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1; 1]$.

On a $\boxed{\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}}$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

(VII) Fonctions exponentielles

Soit $a > 0$ un nombre réel. On cherche à définir la fonction $\boxed{f(x) = a^x}$.

(A) Si $x = q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, on pose

$$f(q) = a^q := a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

(B) Pour prolonger cette fonction à $\mathbb{R}$, il faut pouvoir définir le terme a^r quand r est réel non rationnel. On le fait en prolongeant $f(x)$ par continuité : on sait qu'il existe pour tout $r \in \mathbb{R}$ une suite rationnelle $\{q_n\}$ qui converg vers r. On a donc $\lim_{n\to\infty} q_n = r$. On pose alors

$$a^r := \lim_{n\to\infty} a^{q_n}.$$

Propriétés des fonctions $f(x) = a^x$

(1) $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. C'est une fonction strictement positive.

(2) $f(0) = 1$ et $f(1) = a$.

(3) $f(rx) = a^{rx} = (a^x)^r = f(x)^r$. En particulier, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

(4) $f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$

(5) Si $a > 1$, alors $f(x) = a^x$ est strictement croissante.
Si $0 < a < 1$, alors $f(x) = a^x$ est strictement décroissante.

Graphes des fonctions exponentielles :

Remarque 3.5. Si $a = e$, on retrouve la fonction e^x définie au chapitre 2.

(VIII) Fonctions logarithmes

La fonction $f(x) = a^x$ est strictement monotone (si $a \neq 1$ ce que l'on suppose dès à présent). Elle a donc une fonction inverse et on définit :

$$\log_a y = f^{-1}(y) \qquad \forall y > 0.$$

L'ensemble de définition de $\log_a$ est donc $D_f = \mathbb{R}_+^*$. On a l'équivalence suivante :

$$\boxed{\log_a y = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = a^x} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall y \in \mathbb{R}_+^*$$

Par définition on a les relations suivantes :

$$a^{\log_a y} = y \qquad \forall y > 0 \qquad \text{et} \qquad \log_a a^x = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propriétés des fonctions $\log_a x$

(1) la fonction $\log_a x$ n'est définie que pour $x > 0$.

(2) $\log_a 1 = 0$ et $\log_a a = 1$.

(3) $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$ pour tout $x > 0$ et tout $r \in \mathbb{R}$. En particulier $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$.

(4) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ pour tout $x, y > 0$.

(5) Si $a > 1$, alors $\log_a x$ est strictement croissante.
Si $0 < a < 1$, alors $\log_a x$ est strictement décroissante.

Graphes des fonctions logarithmes :

Définition 3.6 (Logarithme naturel)**.** On pose

$$\boxed{\ln(x) := \log_e x}$$

Changement de bases

Si $L = \log_a x$ alors $a^L = x$ et

$$\ln(x) = \ln(a^L) = L \ln(a)$$

$\Longrightarrow \quad L = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. Ainsi

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.}$$

On a

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^k}{k\,!}.$$

(IX) Fonctions hyperboliques

Sinus hyperbolique :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{(fonction impaire)}$$

Cosinus hyperbolique :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{(fonction paire)}$$

On a la relation suivante :

$$\boxed{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.}$$

Ces 2 fonctions permettent de paramétriser les hyperboles :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \pm a\cosh(t) \\ y = b\sinh(t) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Somme :

$$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$$
$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b.$$

(X) Fonctions hyperboliques inverses

- Pour le sinus hyperbolique, pas de problème, on note arcsinh(x) la fonction inverse. $(D = \mathbb{R})$

- Pour le cosinus hyperbolique, on se restreint à l'intervalle $\mathbb{R}_+$ sur lequel la fonction $f(x) = \cosh(x)$ est monotone. On note alors arccosh(x) la fonction inverse, définie sur $[1; \infty[$ et dont l'image est $\mathbb{R}_+$.

Calcul explicite

Soit $y = \operatorname{arcsinh}(x)$. Alors

$$y = \operatorname{arcsinh}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sinh(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \quad \Longleftrightarrow \quad e^y - e^{-y} = 2x.$$

On pose $u = e^y$ et après avoir multiplié par u, on obtient

$$u^2 - 1 = 2xu \Longleftrightarrow u^2 - 2xu - 1 = 0 \Longleftrightarrow u = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Le signe $-$ est impossible car $u = e^y > 0$. Donc $u = x + \sqrt{x^2 + 1}$ et

$$y = \ln(u) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

On a ainsi démontré que

$$\boxed{\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \qquad x \in \mathbb{R}.}$$

De même, on peut démontrer que

$$\boxed{\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad x \geqslant 1.}$$

3.4 Représentation des courbes planes

1) Explicite : $y = f(x)$.
   Exemple : $y = \dfrac{e^{2x}}{1+x^2}$.
2) Implicite : $F(x;y) = 0$.
   Exemples :
   1) Cercle de centre $C(a;b)$ et de rayon R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$
   2) Ellipse : $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$

   Attention : Courbe $\neq$ fonction.
   Fonction : à un $x \in D$ correspond un seul y $\longleftrightarrow$
   Courbe : il peut y avoir plusieurs y pour un x donné.
3) Représentation paramétrique : x et y sont donnés en fonction d'un paramètre $t \in I \subset \mathbb{R}$.

   Exemple :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases} \qquad t \neq -1.$$

4) Représentation polaire :

A un point $P(x;y)$ correspond un couple $(\rho\,;\,\varphi)$ où ρ est la distance de P à l'origine et φ l'angle entre Ox et OP.
On a les règles de transformations suivantes :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Une courbe peut alors être donnée sous forme polaire, c'est-à-dire à l'aide d'une équation reliant ρ et φ.

Exemples :
A) Cardioïde : $\rho = a(1+\cos\varphi) \quad a>0 \qquad \varphi\in[0\,;\,2\pi]$.

B) Spirale d'Archimède : $\rho = a\varphi$ $(a>0)$ $\varphi\in[0;\infty[$

C) Spirale logarithmique : $\rho = e^{m\varphi}$, $\varphi\in]-\infty;\infty[$. Le point 0 est un point asymptote.

5) On peut combiner 3) et 4) pour avoir

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases}$$

Exemple :

3.5 Valeur limite d'une fonction à l'infini

On cherche à définir $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Définition 3.7. On dira que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$$

si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M_\epsilon \in \mathbb{R}$ tel que

$$|f(x) - a| < \epsilon \qquad\qquad \text{pour tout } x > M_\epsilon \ .$$

Dès que x est + grand que M_ϵ alors $f(x)$ est compris dans une bande de largeur 2ϵ autour de a. Et ceci pour n'importe quel ϵ aussi petit soit-il.

- idem pour la limite en $-\infty$.

Définition 3.8 (Limite impropre)**.** On dira que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad (\text{resp. } -\infty)$$

si pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $M_r \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) > r \qquad (resp. f(x) < r) \qquad\quad \text{pour tout } x > M_r$$

Exemples 3.9.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^q}$, $q \in \mathbb{Q}_+^*$. Alors

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

2)

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{x^m}{x^n}\left(\frac{a_m + \dfrac{a_{m-1}}{x} + \ldots \dfrac{a_1}{x^{m-1}} + \dfrac{a_0}{x^m}}{b_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + \ldots \dfrac{b_1}{x^{n-1}} + \dfrac{b_0}{x^n}}\right).$$

Si $x \longrightarrow \infty$ alors $\frac{a_{m-1}}{x} \longrightarrow 0$, $\frac{a_1}{x^{m-1}} \longrightarrow 0$, etc...
Il reste

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{x^n} \cdot \frac{a_m}{b_n}.$$

Si $m = n$, alors $= \frac{a_m}{b_n} = c$ (asymptote horizontale $y = c$)

Si $m < n$ alors $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$ (asymptote horizontale $y = 0$)

sinon on a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

3) $f(x) = \sin x$. La limite en $x \to \infty$ n'existe pas. Même impropre. Idem pour $\cos x$.

4)

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{x^6} \sin^2(x).$$

Alors $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$.

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

3.6 Valeurs limites en un point et continuité

3.6.1 Définitions

Limite

Définition 1

Soit $f(x)$ une fonction et x_0 un point fixé. On dit que f admet le nombre L pour limite au point x_0 si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon > 0$ avec

$$|f(x) - L| < \epsilon \qquad \text{dès que} \quad 0 < |x_0 - x| < \delta_\epsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

Remarque : Dans la définition, il n'est pas nécessaire que $x_0 \in D_f$. En revanche il faut qu'il existe $\delta > 0$ avec $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\subset D_f \cup \{x_0\}$.

Définition 2

On dit que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ si **pour toute suite** $\{\xi_n\}$ telle que

(i) $\xi_n \neq x_0$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = x_0$,

on a

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = L.$$

Proposition 3.10. *Les 2 définitions ci-dessus sont équivalentes.*

Notation 3.11. Au lieu de $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ on peut écrire $\boxed{\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = L.}$

(Ici encore $h \to 0$ mais $h \neq 0$.)

Définition 3.12. Limite à gauche et limite à droite On peut définir aussi la *limite à gauche* qui est notée $\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x)}$ et la *limite à droite* qui est notée $\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x).}$

Exemple 3.13. Considérons la fonction $f(x)$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 2 \\ 2 \text{ si } x = 2 \\ 3 \text{ si } x > 2 \end{cases}$

Dans cet exemple, on a $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$ et $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$. Mais la limite $\lim_{x \to 2} f(x)$ n'existe pas.

Définition 3.14 (Limite impropre)**.** Limite à droite : On dira que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

si pour tout $M > 0$, il existe $\delta_M > 0$ tel que

$$f(x) > M \qquad \text{pour tout} \quad x \in \left]x_0 \,;\, x_0 + \delta_M\right[$$

Définition analogue pour $-\infty$ et pour la limite à gauche.

Exemples 3.15.

• $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Alors $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$.

• $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Alors

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

3.6.2 Propriétés des limites

Théorème 3.16 (Théorème des gendarmes)**.** *Soient $f(x), \phi(x), \psi(x)$ des fonctions réelles, x_0 un point fixé et $\delta > 0$. Si pour tout $x \in D_f \cap D_\phi \cap D_\psi$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta$ on a*

$$\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

et si

$$\lim_{x \to x_0} \phi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = a$$

alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

La démonstration est similaire à celle faite pour les suites.

Proposition 3.17. *Supposons $f(x) = g(x)h(x)$. Si*

(i) $h(x)$ est borné sur un voisinage de x_0

(ii) et si $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION :
Par hypothèse sur $h(x)$, on a $|h(x)| \leq M$ dès que $|x - x_0| < \delta$.
Soit $\epsilon > 0$ et soit $\delta = \delta_{\epsilon/M}$ tel que $g(x) < \epsilon/M$ dès que $|x - x_0| < \delta$. Un tel δ existe car $g(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0$.
Mais alors

$$|f(x)| = |g(x)| \cdot |h(x)| \leq \frac{\epsilon}{M} \cdot M \leq \epsilon$$

ce qui montre que $f(x)$ tend vers 0. □

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x} \sin x$. Alors $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Soient $f(x)$ et $g(x)$ 2 fonctions telles que

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$

(ii) $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$.

Alors

1) $\lim_{x \to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha a + \beta b$ (linéarité de la limite)

2) $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = ab$

3)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \qquad \text{si } b \neq 0.$$

Cas indéterminés :

$$\frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}; \quad 0 \cdot \infty; \quad \infty + (-\infty)$$

3.6.3 Exemples

1. Calculons $A = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x}-1} \qquad \left(= \dfrac{0}{0}\right)$

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(3x+1-4)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{3(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{3x+1}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

2. $A = x + 2 - \sqrt{x^2+4} \xrightarrow{x\to\infty} ?$

$$\begin{aligned} A &= (x+2-\sqrt{x^2+4}) \cdot \frac{x+2+\sqrt{x^2+4}}{x+2+\sqrt{x^2+4}} \\ &= \frac{x^2+4x+4-(x^2+4)}{x+2+\sqrt{x^2+4}} = \frac{4x}{x+2+x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} \\ &= \frac{4}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+4/x^2}} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

3. Que vaut la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \qquad \left(= \dfrac{0}{0}\right).$

On a

$$\Delta\, OAM < \text{secteur } OAM < \Delta\, OAT.$$

Donc

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2} \cdot 1^2 < \frac{1 \cdot \tan x}{2}$$

ce qui donne

$$\sin x < x < \tan x$$

et en divisant par $\sin x$ on obtient

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Par le théorème des gendarmes, on a

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Plus généralement

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin px}{x} = \lim_{x\to 0} p \cdot \frac{\sin px}{px} = p.$$

4. Calculons
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sin 2x}\right)\sin x = \text{"}(\infty+\infty)\cdot 0\text{"}.$$
On a
$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sin 2x}\right)\sin x &= \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}+\frac{\sin x}{2\sin x\cos x}\\ &= \sqrt[3]{x^2}\,\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{2\cos x}\end{aligned}$$
et la limite vaut alors $0\cdot 1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Composition

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions telles que $\mathrm{Im}(f)\subset D_g$. Si
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$ et
- $\lim\limits_{u\to c} g(u)=L$,

alors
$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=L.$$
Applications :

(1) Que vaut
$$A=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)}{x^2} \qquad \left(=\frac{0}{0}\right)?$$
On a $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ et donc
$$\begin{aligned}A=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 2\cdot \sin^2 x/2}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x/2))^2}{(x/2)^2}\\ &\overset{u=x/2}{=} \lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\\ &= \left(\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\right)^2 = 1.\end{aligned}$$
Donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)}{x^2}=1$$
On écrit que pour $x\approx 0$ on a $1-\cos x\approx\dfrac{x^2}{2}$.
Plus généralement on dit que
$$\boxed{f(x)\approx g(x)\ \text{ en } x_0 \qquad \text{si } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.}$$

(2)
$$h(x)=\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}=\frac{\sin(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}.$$
On pose $u=1-\cos x$. Et $u\longrightarrow 0$ si $x\longrightarrow 0$. Donc
$$\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

3.7 Continuité

Définition 1

Soit $f(x)$ une fonction et $x_0 \in D_f$. On dit que f est continue au point x_0 si

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Définition 2

Soit $f(x)$ une fonction et $x_0 \in D_f$. On dit que f est continue au point x_0 si pour toute suite $\{\xi_n\}$ telle que $\lim_{n \to \infty} \xi_n = x_0$, on a

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f(\xi_n).$$

Une fonction continue commute avec l'opérateur limite.
Ces 2 définitions sont équivalentes.

Définition 3.18. On dit que $f(x)$ est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point $x_0 \in I$. On note alors $f(x) \in C^0(I)$.

Théorème 3.19. *Soient f et g deux fonctions continues sur I. Alors*
(1) $\alpha f + \beta g$ est continue sur I pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(2) fg est continue sur I.
(3) $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $I' = I \backslash \{x \mid g(x) = 0\}$.
(4) Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Trois types de discontinuité

Type I La limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe mais n'est pas égale à $f(x_0)$.

Type II $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

Type III une des limites $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ou $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ (ou les deux) n'existe pas.

Théorème 3.20. *Soit $f(x)$ une fonction bijective et continue sur l'intervalle I. Alors sa fonction réciproque $f^{-1}(x)$ est continue sur l'intervalle $f(I)$*

3.7.1 Exemples

1. La fonction $f(x) = x$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   Corollaire : toute fonction polynômiale et rationnelle est continue sur son domaine de définition.

2. La fonction $f(x) = \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$:
   Démonstration : On a
   $$|\sin(x+h) - \sin x| = \left| 2\sin(h/2)\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \right| \leq 2 \cdot \left|\frac{h}{2}\right| \leq |h|.$$
   Donc $\lim_{h \to 0} \sin(x+h) = \sin x$. $\square$

   De même, on montre que $\cos x$ et $\tan x$ sont continues sur leurs domaines de définition.

3. La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x_0 > 0$. Alors $\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \dfrac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$ et donc
   $$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}$$
   ce qui montre que si $x \longrightarrow x_0$ alors $\sqrt{x} \longrightarrow \sqrt{x_0}$.
   La fonction $\sqrt{x}$ est également continue à droite en $x = 0$.

   On montre de même que la fonction $f(x) = x^q$ est continue sur son domaine de définition pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

4. La fonction $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   Démonstration : On doit montrer que $\lim_{h \to 0} e^{x+h} = e^x$ c'est-à-dire que
   $$\lim_{h \to 0} \left(e^{x+h} - e^x\right) = 0.$$
   Mais comme
   $$|e^{x+h} - e^x| = |e^x e^h - e^x| = e^x |e^h - 1|$$
   il suffit de montrer que $\lim_{h \to 0} e^h = 1$, c'est-à-dire que e^x est continue en $x = 0$.

Si $|h| < 1$, on a

$$\begin{aligned}
e^h &= 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3\,!} + \dots \qquad \text{et donc} \\
|e^h - 1| &= \left|h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3\,!} + \dots\right| \\
&\leq |h| \left(1 + \frac{|h|}{2} + \frac{|h|^2}{3\,!} + \frac{|h|^3}{4!} + \dots\right) \\
&\leq |h| \left(1 + \frac{|h|}{2} + \left(\frac{|h|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|h|}{2}\right)^3 + \dots\right) \\
&= |h| \frac{1}{1 - \frac{|h|}{2}} = \frac{2|h|}{2 - |h|} \leq 2|h|.
\end{aligned}$$

En conséquence, si $h \to 0$ on a $|e^h - 1| \longrightarrow 0$ ce qui montre que $\lim_{h \to 0} e^h = 1$. □

Corollaire : Les fonctions a^x sont continues sur $\mathbb{R}$ car $a^x = e^{x \ln a}$.
Corollaire : Les fonctions $\log_a x$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.7.2 Prolongement par continuité

Soit $f(x)$ une fonction et $x_0 \notin D_f$. Supposons que la limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ existe. On peut alors définir une fonction $\tilde{f}(x)$ en posant

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) &= f(x) \qquad \text{si} \quad x \neq x_0 \\ \tilde{f}(x_0) &= a = \lim_{x \to x_0} f(x). \end{cases}$$

On appelle $\tilde{f}$ le **prolongement par continuité de** f au point x_0. On a cette fois $x_0 \in D_{\tilde{f}}$.

Remarque : En général, la nouvelle fonction sera encore notée f par un abus de notation.

Exemples :
1) La fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ indéfinie en zéro peut être prolongée par continuité en posant $f(0) = 1$ car on vient de voir que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

2) Soit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{si} \quad x \neq 1, x \geqslant 0 \\ c & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Trouver c pour que f soit continue en 1.

Solution : On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{(x^3-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1} (x^2+x+1)(\sqrt{x}+1) = 6.\end{aligned}$$

Il faut poser $c = 6$ et on peut alors écrire

$$\tilde{f}(x) = (x^2+x+1)(\sqrt{x}+1) \qquad D_{\tilde{f}} = \mathbb{R}_+.$$

Théorème 3.21. *Toutes les fonctions élémentaires définies au paragraphe §3.3 sont continues sur D_f.*

3.7.3 Propriétés des fonctions continues

Théorème de Bolzano :
Soit $f(x)$ une fonction continue sur l'intervalle $I = [a; b]$ avec $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Alors il existe un $x_0 \in I$ avec $f(x_0) = 0$.

Corollaire : Si $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue avec $f(a) = c_1$ et $f(b) = c_2$, alors pour tout c compris entre c_1 et c_2, il existe $x_0 \in [a; b]$ avec $f(x_0) = c$.

Théorème 3.22. *Soit $f(x)$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $I = [a; b]$. Alors $f(x)$ atteint son maximum et son minimum sur I, c'est-à-dire qu'il existe $x_m, x_M \in I$ avec*

$$f(x_M) \geqslant f(x) \quad \forall x \in I \qquad \text{et} \qquad f(x_m) \leq f(x) \quad \forall x \in I.$$

ATTENTION : ce résultat est faux si I est ouvert. Exemple : $f(x) = x$ et $I =]0; 1[$.

Théorème 3.23. *Soit $f(x)$ une fonction <u>continue</u> sur I. Alors*

$$\boxed{f \quad \text{est injective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \quad \text{est strictement monotone.}}$$

DÉMONSTRATION :
$\Longleftarrow$ il est clair que, pour une fonction strictement monotone, $x \neq y$ implique $f(x) \neq f(y)$

$\Longrightarrow$ On montre la contraposée : Supposons f non strictement monotone. Alors il existe $x_1 < x_2 < x_3$ avec $f(x_1) < f(x_2)$ et $f(x_2) \geqslant f(x_3)$ (ou le contraire mais la preuve est la même). Si $f(x_2) = f(x_3)$ alors f n'est pas injective et c'est terminé.
On peut donc supposer $f(x_2) > f(x_3)$. Mais alors il existe c avec $f(x_1) < c < f(x_2)$ et $f(x_2) > c > f(x_3)$. Par le corollaire précédent, il existe dont $\xi_1 \in [x_1; x_2[$ et $\xi_2 \in]x_2; x_3]$ avec $f(\xi_1) = c$ et $f(\xi_2) = c$. Donc f n'est pas injective. □

Contre-exemples : l'hypothèse de continuité est essentielle :

Chapitre 4

Dérivées et applications

4.1 La dérivée

4.1.1 Définitions

Soit $y = f(x)$ une fonction continue, $x_0 \in D_f$ un point fixé et $\Delta x > 0$ l'accroissement.

Calculons

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Interprétation géométrique : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ = la pente de la droite qui passe par les points $P(x_0\,;\, f(x_0))$ et $Q(x_0 + \Delta x\,;\, f(x_0 + \Delta x))$.

Interprétation physique : si $x = t$ est le temps et $y = f(t)$ est la distance parcourue, alors $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ est la vitesse moyenne durant le temps Δt.

Que devient $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $\Delta x \longrightarrow 0$?
Géométriquement, on aura la pente de la tangente au graphe de f passant par $P(x_0; f(x_0))$.
Physiquement, on a la vitesse instantanée au temps $t = t_0$.
On pose alors la définition suivante :

Définition 4.1 (Dérivabilité)**.** On dit que la fonction $f(x)$ est **dérivable au point** x_0 si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe. Cette limite est appelée la **dérivée de** f **au point** x_0. Elle est notée $f'(x_0)$.

Ainsi

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.}$$

Autre notation :

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}|_{x=x_0} = \frac{dy}{dx}(x_0).$$

$f'(x_0) =$ la pente de la tangente au graphe de f au point $(x_0; f(x_0))$.

Définition 4.2. Soit $f(x)$ une fonction et $I \subset D_f$ un intervalle. Si $f'(x)$ existe pour tout $x \in I$, on dit que f est **dérivable sur** I. La fonction $f'(x)$ est appelée la **dérivée de** f (sur I).

Autre notation : la dérivée de $f(x)$ est aussi notée $f'(x) = \dfrac{df}{dx}(x) = \dfrac{d}{dx}f(x)$ ou encore f' s'il n'y a aucune ambiguïté sur la variable.

Autre notation : on note
dx l'accroissement infinitésimal de la variable x
dy l'accroissement infinitésimal de la variable y.
Si $y = f(x)$ alors $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ et donc $\boxed{dy = f'(x)dx}$

Exemple 4.3. Soit $f(x) = ax + b$. Alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi $(ax+b)' = a$.

Application : équation de la tangente à un graphe

Soit $f(x)$ une fonction continue et $P(a\,;\, f(a))$ un point du graphe de f. Alors l'équation de la tangente au graphe de f passant par P est :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a).}$$

Théorème 4.4. *Soit $f(x)$ une fonction. Si $f(x)$ est dérivable en x_0 alors elle est continue en ce point.*

ATTENTION : la réciproque est fausse !
Exemple : la fonction $f(x) = |x|$ est continue mais pas dérivable en 0. En effet, on a

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

alors que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

Donc $f'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h}$ n'existe pas.

4.1.2 Exemples

1. Soit $f(x) = x^2$. Alors
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x.$$
Ainsi $f'(x) = 2x$.
2. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Alors pour $x > 0$, on a
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
car $\sqrt{x}$ est continue.
Si $x = 0$, on trouve $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$. La fonction $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. La tangente est verticale.
3. Soit $f(x) = e^x$. Alors
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{h+x} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h e^x - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \dots}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \underbrace{\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3!} + \frac{h^3}{4!} + \dots\right)}_{=R(h)} \\ &= e^x. \end{aligned}$$
On a bien $\lim_{h\to 0} R(h) = 1$ car
$$\begin{aligned} |R(h) - 1| = \left|\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3!} + \frac{h^3}{4!} + \dots\right| &\leqslant \frac{|h|}{2} + \left(\frac{|h|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|h|}{2}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{|h|}{2}\left(1 + \frac{|h|}{2} + \left(\frac{|h|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|h|}{2}\right)^3 + \dots\right) \\ &= \frac{|h|}{2} \frac{1}{1 - \frac{|h|}{2}} = \frac{|h|}{2 - |h|} \xrightarrow{h\to 0} 0. \end{aligned}$$
Ainsi $(e^x)' = e^x$.
4. Soit $f(x) = \sin x$. Alors
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot 2 \cdot \sin(\frac{x+h-x}{2}) \cdot \cos(\frac{x+h+x}{2}) \\ &= \lim_{h\to 0} 2 \cdot \frac{\sin(h/2)}{h} \cdot \cos(\frac{2x+h}{2}) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cdot \lim_{h\to 0} \cos(\frac{2x+h}{2}) \\ &= 1 \cdot \cos(x). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

4.1.3 Régles de calculs

Soient f, g dérivables sur I. Alors

(I) $\boxed{(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'}$ La dérivée est une opération linéaire.

(II) $\boxed{(fg)' = f'g + fg'}$

DÉM :

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

Corollaire :

$$\begin{aligned}&(f^2)' = f'f + ff' = 2ff' \\ &(f^3)' = (f^2 f)' = (f^2)'f + f^2 f' = 2ff'f + f^2 f' = 3f^2 f'\end{aligned}$$

Par récurrence :

$$\boxed{(f^n)' = nf^{n-1} \cdot f'}$$

(III)

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.}$$

DÉM : En dérivant l'égalité $f \cdot \dfrac{1}{f} \equiv 1$ à l'aide du point (II), on obtient

$$f' \cdot \frac{1}{f} + f \cdot \left(\frac{1}{f}\right)' = 0$$

ce qui donne $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$.

Corollaire 1 :

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.}$$

Corollaire 2 :

$$\boxed{\left(f^{-n}\right)' = -nf^{-n-1} \cdot f'}$$

(IV) **Fonction composée :** soit $\phi(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Alors

$$\boxed{\phi'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&\text{On pose } u = f(x_0+h) - f(x_0) \text{ avec } u \to 0 \text{ si } h \to 0. \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{g\big(u + f(x_0)\big) - g(f(x_0))}{u} \cdot f'(x_0) \\
&= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)
\end{aligned}$$

$\square$

Quelques propriétés qui en découlent

1. Soit $\phi(x) = g(ax)$. Alors $\phi'(x) = g'(ax) \cdot (ax)' = a \cdot g'(ax)$.
   Corollaire : Si $f(x)$ est paire (resp. impaire) alors $f'(x)$ est impaire (resp. paire). En effet, si on dérive l'égalité $f(-x) = f(x)$, on obtient $f'(-x) \cdot (-1) = f'(x)$ et donc $f'(-x) = -f(x)$.
2. Soit $\phi(x) = g(x+T)$. Alors $\phi'(x) = g'(x+T) \cdot (x+T)' = g'(x+T)$.
   Corollaire : Si $f(x)$ est périodique alors $f'(x)$ l'est aussi.

4.1.4 Dérivées des fonctions élémentaires

A) Fonctions polynomiales :

$f(x) = x^n \xrightarrow{(II)} f'(x) = nx^{n-1}$.

Si $f(x) = P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ alors par (I), on a

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

B) Fonctions rationnelles et irrationnelles

Si $f(x) = x^{-n}$ alors par (III) on a $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

Si $f(x) = x^{m/n}$ alors

$$\begin{aligned}
f(x)^n &= x^m \qquad \Big| \frac{d}{dx} \\
n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x) &= m x^{m-1} \\
f'(x) &= \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{f(x)^{n-1}} = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{\left(x^{m/n}\right)^{n-1}} \\
&= \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{x^{m-\frac{m}{n}}} = \frac{m}{n} x^{m/n-1}.
\end{aligned}$$

En conclusion : $\boxed{\dfrac{d}{dx}\, x^q = qx^{q-1} \qquad \forall q \in \mathbb{Q}.}$

Et par (IV), on a $\boxed{\dfrac{d}{dx}\,(f(x))^q = q\cdot (f(x))^{q-1}\cdot f'(x)}$

Exemple : $f(x) = \sqrt[3]{x^4+\sqrt{x}} = (x^4+\sqrt{x})^{1/3} = \left(x^4 + x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$. Alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}(x^4+\sqrt{x})^{1/3-1}\cdot\left(x^4+x^{\frac{1}{2}}\right)' \\ &= \frac{1}{3}(x^4+\sqrt{x})^{-2/3}\cdot(4x^3+\frac{1}{2}x^{-1/2}) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{4x^3+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{(x^4+\sqrt{x})^2}}. \end{aligned}$$

C) Fonctions trigonométriques :
- On a démontré que $(\sin x)' = \cos x$.
- $f(x) = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. Alors

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1) = -\sin x.$$

- $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Alors

$$\begin{aligned} f' &= \frac{\sin'\cos - \sin\cos'}{\cos^2} \\ &= \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1+\tan^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)}$$

D) Fonction exponentielle : Comme $(e^x)' = e^x$ et par (IV) on a

$$\boxed{\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}\cdot f'(x).}$$

Maintenant, si $f(x) = a^x = e^{x\cdot\ln a}$, alors

$$f'(x) = e^{x\ln a}\cdot\ln a = a^x\ln a.$$

Ainsi

$$\boxed{(a^x)' = a^x\cdot\ln a}$$

E) Fonctions hyperboliques

- Soit $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Alors par (I) et D), on a

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh x.$$

- Soit $f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ Alors

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - (-1)e^{-x}\right) = \cosh x.$$

4.1.5 Dérivée de la fonction réciproque

Soit $f(x)$ une fonction bijective et $f^{-1}(y)$ sa fonction réciproque. On désire calculer $(f^{-1})'(y)$ connaissant $f'(x)$.
On suppose $f'(x) \neq 0$. Par définition de f^{-1}, on a

$$(f \circ f^{-1})(y) = y$$

et en dérivant par rapport à y et en utilisant (IV), on trouve $\quad f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1$ ce qui donne

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.}$$

En notant $x = f^{-1}(y)$, on obtient $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Exemples :

(1) Fonctions logarithmes :
Appliquons la formule à $f(x) = e^x$ et $f^{-1}(y) = \ln y$. Comme $f'(x) = e^x$, on obtient

$$(\ln y)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

Corollaire : $\boxed{(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}.}$

(2) Fonctions trigonométriques inverses :

- Soit $f(x) = \sin x$ et $f^{-1}(y) = \arcsin y$. Comme $f'(x) = \cos x$, on a

$$\boxed{(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.}$$

La dernière égalité a été démontrée dans la série 6.

- Soit $f(x) = \cos x$ et $f^{-1}(y) = \arccos y$. Comme $f'(x) = -\sin x$, on a

$$\boxed{(\arccos y)' = \frac{1}{-\sin(\arccos y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

- Comme $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$, on a

$$\boxed{(\arctan y)' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}}$$

(3) Fonctions hyperboliques inverses :
- Comme $(\sinh x)' = \cosh x$, on a

$$(\text{arcsinh } y)' = \frac{1}{\cosh(\text{arcsinh } y)} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

On a utilisé ici le fait que $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ et donc que $\cosh u = \sqrt{1 + \sinh^2 u}$.
- De même on montre que

$$\boxed{(\text{arccosh } y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \qquad y > 1}$$

4.1.6 Quelques exemples

1. Quelle est la dérivée de $f(x) = x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Définition : $\boxed{x^\alpha := e^{\alpha \ln x}.}$

   Cohérent avec la définition précédente si $\alpha \in \mathbb{Q}$.
   Alors

$$\begin{aligned} f'(x) = (e^{\alpha \ln x})' &= e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' \\ &= e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} \\ &= \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

   Ainsi

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.}$$

2. Comment dériver la fonction

$$f(x) = u(x)^{v(x)} \quad ?$$

   D'abord, comment est définie $f(x)$? On pose

$$f(x) := e^{v(x) \ln(u(x))}$$

   et $D_f = \{x \mid u(x) > 0\}$.

Notons que $u(x)^{v(x)}$ n'a de sens que si $u(x) > 0$. La dérivée vaut alors

$$\begin{aligned} f' = (u^v)' &= e^{v\ln(u)} \cdot \left(\frac{u'}{u} \cdot v + v' \ln u\right) \\ &= u^v \cdot \left(\frac{u'v}{u} + v' \ln u\right). \end{aligned}$$

Exemple : Calculons l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = x^{\sin x}$ au point $P(\pi; 1)$.
On a $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

$$f'(x) = x^{\sin x}\left(\frac{1 \cdot \sin x}{x} + \cos x \ln x\right).$$

En $P(\pi; 1)$ on obtient $f'(\pi) = -\ln \pi$. L'équation de la tangente est donc

$$y = -\ln \pi \cdot (x - \pi) + 1 = -(\ln \pi)\, x + 1 + \pi \ln \pi.$$

4.2 Dérivée des fonctions implicites

Courbe : $(\gamma)\ :\ 2x^2 - y^3 + \ln(xy) - 1 = 0 \qquad (*)$

Autour d'un point P fixé, cette relation définit une fonction $y = y(x)$ (pas nécessairement analytique) et l'équation (*) s'écrit

$$\begin{aligned} 2x^2 - y(x)^3 + \ln(xy(x)) - 1 &= 0 \qquad \Big|\frac{d}{dx} \\ 4x - 3y(x)^2 y'(x) + \frac{1 \cdot y(x) + xy'(x)}{xy(x)} &= 0 \end{aligned}$$

Au point $P(1; 1)$ on obtient

$$4 - 3y'(1) + \frac{1 + y'(1)}{1} = 0$$

ce qui donne $2y'(1) = 5$ d'où $y'(1) = \frac{5}{2}$.
Ainsi, sans trouver explicitement la fonction $y = y(x)$ on a pu calculer sa dérivée en un point donné.
Ce procédé s'applique naturellement à toute relation de la forme

$$F(x, y) = 0.$$

Exemple : Calculons les pentes des tangentes au graphe de l'ellipse

$$\Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

On dérive cette relation par rapport à x pour obtenir

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$$

ce qui donne

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} = \text{ pente de la tangente au point } P(x, y) \in \Gamma$$

Angle entre deux courbes

Soient Γ_1 et Γ_2 deux courbes s'intersectant en un point P. On définit l'angle entre 2 courbes au point P comme l'angle entre leurs tangentes au point P.

On a $|\theta| = |\theta_2 - \theta_1|$. Si y_1' est la pente de la tangente à Γ_1 en P et y_2' la pente de la tangente à Γ_2 en P, alors
$\tan\theta_1 = y_1'$ et $\tan\theta_2 = y_2'$. On a donc

$$|\tan\theta| = |\tan(\theta_2 - \theta_1)| = \left|\frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}\right| = \left|\frac{y_2' - y_1'}{1 + y_1' y_2'}\right|.$$

Donc

$$\boxed{|\tan\theta| = \left|\frac{y_2' - y_1'}{1 + y_1' y_2'}\right|}$$

Exemple : Calculons l'angle entre les courbes

$$\Gamma_1 : y = f(x) = x^2$$

et

$$\Gamma_2 : y = g(x) = \sqrt[3]{x}$$

au point $P(1; 1)$.
Γ_1 : $f'(x) = 2x$ et donc au point P : $y_1' = 2$
Γ_2 : $g'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ et donc au point P : $y_2' = \frac{1}{3}$. On obtient

$$\tan\theta = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

ce qui donne $\theta = \frac{\pi}{4}$.

4.2.1 Représentation paramétrique

Courbe Γ :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

On veut trouver la pente de la tangente au graphe en un point donné.
On introduit la notation :

$$\boxed{\dot{} = \frac{d}{dt}}$$

Ceci donne $\dfrac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$ et $\dfrac{dy}{dt} = \dot{y}(t)$.
Donc $dx = \dot{x}(t) \cdot dt$ et $dy = \dot{y}(t) \cdot dt$. Alors

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.}$$

Exemple :

$$\begin{cases} x = t\sin t & \Longrightarrow \quad \dot{x}(t) = \sin t + t\cos t \\ y = t^2 + \cos t & \Longrightarrow \quad \dot{y}(t) = 2t - \sin t \end{cases}$$

Et donc

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t - \sin t}{\sin t + t\cos t}.$$

Au point $P(0\,;\,1)$ $(t = 0)$, on obtient

$$y'|_P = \left.\frac{2t - \sin t}{\sin t + t\cos t}\right|_{t=0} = „\frac{0}{0}" = \frac{2 - \frac{\sin t}{t}}{\frac{\sin t}{t} + \cos t} \xrightarrow{t \to 0} \frac{2-1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Représentation polaire

Si la courbe est donnée sous forme polaire $\rho = \rho(\varphi)$. Alors

$$\boxed{y'|_P = \left.\frac{\dot{\rho}(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi}{\dot{\rho}(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi}\right|_P} \qquad (*)$$

Exemple : $\rho = \sqrt{\cos(2\varphi)}$.

On veut trouver la tangente horizontale dans le quadrant I ($0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$).
On cherche donc le point P tel que $y'|_P = 0$. En utilisant (*), on obtient l'équation

$$\dot{\rho}(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi = 0. \qquad (**)$$

En dérivant la fonction donnée $\rho(\varphi) = \sqrt{\cos(2\varphi)}$ par rapport à φ, on trouve

$$\begin{aligned}\dot{\rho}(\varphi) &= \frac{1}{2}\cos(2\varphi)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sin(2\varphi)\cdot 2) \\ &= -\frac{\sin(2\varphi)}{\sqrt{\cos(2\varphi)}}\end{aligned}$$

et donc l'équation (**) devient (après simplifications)

$$-\sin 2\varphi \sin\varphi + \cos 2\varphi\cos\varphi = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos(3\varphi) = 0.$$

Donc $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

4.3 Théorème de la moyenne

4.3.1 Quelques théorèmes

Définition 4.5 (Fonction C^1)**.** Une fonction $f(x)$ est dite **continûment dérivable sur** $I \subset D_f$ si $f'(x)$ existe et est continue sur tout I.
On note $C^1(I)$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur I.
En bref : $f(x) \in C^1(I) \Longleftrightarrow f'(x) \in C^0(I)$.

Théorème 4.6 (Théorème de Rolle)**.** *Soit $f(x)$ continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ avec $f(a) = f(b) = c$ alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que*

$$f'(\xi) = 0.$$

Démonstration :
Si $f(x) \equiv c$ alors $f'(x) = 0$ et le théorème est trivial.
Considérons la fonction $g(x) = f(x) - c$. Alors $g(a) = g(b) = 0$. On peut supposer que a et b sont des zéros consécutifs et admettre que $g(x) > 0$ sur $]a;b[$.
Soit ξ le point où $g(x)$ atteint son maximum. Pour $h > 0$, on a

$$g(\xi + h) < g(\xi)$$

et alors

$$\frac{1}{h}\cdot(g(\xi+h) - g(\xi)) < 0 \qquad (*)$$

Pour $h < 0$, on a

$$g(\xi + h) < g(\xi)$$

et donc

$$\frac{1}{h}\cdot(g(\xi+h) - g(\xi)) > 0 \qquad (**)$$

Comme g est dérivable, on a

$$g'(\xi) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \cdot (g(\xi+h) - g(\xi)) = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} \cdot (g(\xi+h) - g(\xi)).$$

Cette limite ne peut être que 0 vu (*) et (**). Donc $g'(\xi) = 0$.

□

Théorème 4.7 (Théorème de la moyenne)**.** *Soit $f(x)$ continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe un $\xi \in]a;b[$ tel que*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration : On considère la fonction

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

qui satisfait aux hypothèses du théorème de Rolle. Alors il existe $\xi \in]a;b[$ avec $g'(\xi) = 0$, i.e.

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 1 = 0$$

ce qui donne la conclusion cherchée.

□

Corollaire 4.8. *Si $f'(x) \equiv 0$ pour tout $x \in I$ alors f est constante sur I.*

Démonstration : En effet si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver $]a;c[\subset I$ avec $f(a) \neq f(c)$. Mais alors il existerait $\xi \in]a;c[$ avec

$$f'(\xi) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \neq 0$$

ce qui contredit l'hypothèse. □

Corollaire 4.9. *Si $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in I$, alors $f(x) = g(x) + C$ pour tout $x \in I$.*

Corollaire 4.10. *Soit $f(x)$ continue sur $I = [a;b]$ et dérivable en tout point $x \neq x_0$. Supposons que $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ existe. Alors f est dérivable en x_0 et*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$$

(i.e. f' est continue en x_0).
Autrement dit, les seuls types de discontinuité (cf. §3.7) pour la dérivée d'une fonction continue sont les types II et III. Le type I ne peut pas se produire pour f'.

DÉMONSTRATION : On a par le théorème de la moyenne appliqué aux points x_0 et $x_0 + h$:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(\xi) \qquad \text{pour un } \xi \in]x_0; x_0+h[$$

ce qui donne en passant à la limite quand $h \to 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\xi \to x_0} f'(\xi)$$

□

Théorème 4.11 (Théorème de Cauchy)**.** *Soient f, g deux fonctions dérivables sur $[a;b]$, avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Alors il existe $\xi \in I$ avec*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

DÉMONSTRATION :
On considère la fonction

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

qui satisfait aux hypothèses du théorème de Rolle ($h(a) = h(b) = f(a)$). Il existe donc ξ avec $h'(\xi) = 0$. Mais comme

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x)$$

on en déduit que

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

□

4.3.2 La règle de Bernoulli-l'Hospital

Théorème 4.12 (Règle de Bernoulli- l'Hospital)**.** *Soient f, g deux fonctions dérivables sur $I =]a; b[$ telles que pour tout $x \in I$ on ait $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$.*
Supposons que

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \alpha$ *avec* $\alpha = 0$ *ou* $\pm\infty$ *;*
- $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu$ *avec* $\mu \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Alors

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu.$$

Remarque 4.13. La règle reste valable si l'on remplace a^+ par b^-, par a ou par $\pm\infty$.

DÉMONSTRATION :

(I) $\alpha = 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

Posons $b = a + h$. Alors le théorème de Cauchy implique qu'il existe $\xi = a + \theta h$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ et
$$\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)}.$$
Comme $f(a) = g(a) = 0$, on a
$$\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)} = \frac{f(a+h)}{g(a+h)}.$$
Si $b \longrightarrow a$, alors $h \longrightarrow 0$, $\theta h \longrightarrow 0$ et $\xi \longrightarrow a$. On a donc
$$\begin{aligned} & \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} \\ \Longrightarrow \quad & \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{b\to a} \frac{f(b)}{g(b)} \\ \Longrightarrow \quad & \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

□

(II) $\alpha = +\infty$ et $\mu \neq 0$. On a, par hypothèse, que $\frac{1}{f}, \frac{1}{g} \xrightarrow{x\to a^+} 0$.

Posons $L = \lim_{x\to a^+} \frac{g(x)}{f(x)}$. Alors
$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to a^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{1/f(x)}{1/g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{(1/f(x))'}{(1/g(x))'} = \lim_{x\to a^+} \frac{-1/f(x)^2 \cdot f'(x)}{-1/g(x)^2 \cdot g'(x)} \\ &= \lim_{x\to a^+} \frac{g(x)^2}{f(x)^2} \cdot \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left(\lim_{x\to a^+} \frac{g(x)}{f(x)} \right)^2 \cdot \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L^2 \cdot \mu. \end{aligned}$$
En divisant par L^2, on obtient $\frac{1}{L} = \mu$ d'où l'on en déduit que
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{L} = \mu.$$

□

Exemples 4.14.

1. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ Alors
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$
2. $f(x) = x \ln x$. Que vaut $\lim_{x\to 0} f(x)$? On a
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} x \ln x &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} \qquad \left(= \frac{-\infty}{\infty} \right) \\ &\overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} (-x) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x\ln x = 0}$$

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} &\qquad \left(=\frac{\infty}{\infty}\right)\\ &\overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} \qquad \left(=\frac{\infty}{\infty}\right)\\ &\overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0.\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$.

4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x}{1}=1.$$

5.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln(x^3\ln x)} &\overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\frac{1}{x^3\ln x}\cdot(\frac{x^3}{x}+3x^2\ln x)}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\ln x}{x^2+3x^2\ln x}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{1+3\ln x}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1/\ln x+3}=\frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

Expressions indéterminées de la forme ∞^0, 1^∞, 0^0

Considérons la fonction $\phi(x)=u(x)^{v(x)}$ et supposons que

$$\lim\ \phi(x)$$

soit de la forme indéterminée 0^0 ou 1^∞ ou ∞^0. On lève l'indétermination en procédant comme suit :

1. On applique le logarithme :

$$\ln\phi(x)=\ln\left[u(x)^{v(x)}\right]=v(x)\cdot\ln[u(x)]\,.$$

2. L'expression

$$\lim\ \ln\phi(x)=\lim\ v(x)\cdot\ln[u(x)]$$

est maintenant de la forme $0\cdot(\pm\infty)$ que l'on transforme en une expression de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. On applique alors la règle de l'Hospital pour calculer $\lim\ln\phi(x)=L$.

3. On applique l'exponentielle :

$$\lim\phi(x)=e^L.$$

Exemples 4.15.

1. ∞^0 : soit $\phi(x) = x^{\frac{1}{x}}$. Calculons $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$. On a
$$\ln\phi(x) = \frac{1}{x}\cdot\ln x = \frac{\ln x}{x}$$
et la limite vaut
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1} = 0.$$
Ainsi $\lim_{x\to\infty}(\ln\phi(x)) = 0$ ce qui donne (en appliquant e^x)
$$\lim_{x\to\infty}\phi(x) = e^0 = 1.$$

2. 1^∞ : soit $\phi(x) = x^{\frac{1}{1-x^4}}$. Calculons $\lim_{x\to 1}\phi(x)$. On a
$$\ln\phi(x) = \frac{1}{1-x^4}\ln x = \frac{\ln x}{1-x^4}$$
et le passage à la limite donne
$$\lim_{x\to 1}[\ln\phi(x)] = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^4} \overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{-4x^3} = -\frac{1}{4}.$$
Finalement on a donc
$$\lim_{x\to 1}\phi(x) = e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}.$$

3. 1^∞ : Calculer la limite
$$\lim_{x\to 0^+}\underbrace{(1+x^2)^{1/x}}_{=\phi(x)}.$$
On a
$$\ln\phi(x) = \frac{1}{x}\cdot\ln(1+x^2) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$$
et
$$\lim_{x\to 0^+}\ln\phi(x) \quad \left(=\frac{0}{0}\right) \overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{2x/(1+x^2)}{1} = 0.$$
On en déduit que $\lim\phi(x) = e^0 = 1$.

4. 0^0 : calculons
$$\lim_{x\to 0}\underbrace{(\sin x)^x}_{=\phi(x)} \qquad \left(=0^0\right).$$
On a $\ln\phi(x) = x\cdot\ln\sin x = \dfrac{\ln\sin x}{1/x}$. Par l'Hospital, on a
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\ln\phi(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{1/x} &\overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x/\sin x}{-1/x^2}\\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{x^2\cos x}{\sin x}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{1} = -1\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$
En reprenant l'exponentielle, on obtient
$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^x = e^0 = 1.$$

4.3.3 Comparaison des croissances des fonctions $(\ln x)^\alpha$, x^β et $e^{\gamma x}$

Théorème 4.16. *Pour tout $\beta > 0$, on a*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} = 0.}$$

La fonction $\ln(x)$ croît moins vite que toute puissance positive de x.

Démonstration :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} \overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\beta x^{\beta-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\beta x^\beta} = 0.$$

□

Corollaire 4.17.

$$\forall \alpha, \beta > 0, \qquad \boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0.}$$

Démonstration :
Le théorème précédent implique qu'il existe $X_1 \in \mathbb{R}$ avec $\ln x < x^{\frac{\beta}{2\alpha}}$ pour tout $x > X_1$. Alors

$$0 < \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} < \frac{x^{\frac{\beta}{2}}}{x^\beta} = \frac{1}{x^{\frac{\beta}{2}}} \xrightarrow{x\to\infty} 0.$$

□

Corollaire 4.18. $\forall \alpha > 0$, $\forall a > 1$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0}$$

La fonction a^x $(a > 1)$ croît plus vite que toute puissance de x.

Démonstration :
On pose $\beta = \ln a > 0$ car $a > 1$ et $x = \ln t$ en notant que $x \to \infty \Leftrightarrow t \to \infty$. Alors

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} &= \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{e^{\beta \ln t}} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta} = 0 \qquad \text{(par le corollaire précédent.)}\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.19. *Pour tout polynôme $P(x)$ et tout $p > 0$, on a*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} P(x) e^{-px} = 0}$$

Corollaire 4.20.

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\ln x)^n = 0.}$$

Démonstration :
On pose $x = e^{-t}$. Alors $t \to \infty$ lorsque $x \to 0^+$. Donc

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\ln x)^n = \lim_{t\to\infty} e^{-t\alpha}(-t)^n = (-1)^n \frac{t^n}{e^{t\alpha}} = 0.$$

□

4.4 Dérivées d'ordres supérieurs

Si $f'(x)$ est elle-même dérivable on note

$$f''(x) = (f'(x))'$$

et ainsi de suite $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$.

L'opérateur différentiel se note $\dfrac{d^2}{dx^2}$ au lieu de $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{d}{dx})$.

Exemple : si $f(x) = \sin(x)$ alors

$$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x \quad f^{(3)}(x) = -\cos x \quad f^{(4)}(x) = \sin x$$

Définition 4.21. Si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I on note

$$f \in C^n(I)$$

et l'on dit que f est *n-fois continûment dérivable.*
On définit

$$C^\infty(I) = \bigcup_n C^n(I).$$

C'est l'ensemble des fonctions dont **toutes** les dérivées sont continues.

Exemple : $e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$

- Si $f \in C^n(I)$ et $g \in C^n(I)$ alors $f + g \in C^n(I)$ et

$$\boxed{(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.}$$

Formule de Leibniz

- Si $f, g \in C^n(I)$ alors $f \cdot g \in C^n(I)$ et on a

$$\boxed{(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}}$$

où $f^{(0)} = f$. La démonstration, qui se fait par récurrence, est analogue à celle pour la formule du binôme.
En particulier :

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$
$$(fg)^{(3)} = f^{(3)}g + 3f''g' + 3f'g'' + fg^{(3)}$$

4.5 Etude de fonction

4.5.1 Croissance et extremum

Dans toute cette section, $f(x)$ désignera une fonction continue sur son ensemble de définition.

Théorème 4.22. *Soit f une fonction continue sur $I = [a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors*

$$f \text{ est croissante} \quad \Longleftrightarrow \quad f' \geqslant 0 \text{ sur }]a; b[$$

De plus, si $f' > 0$, alors f est strictement croissante.

DÉMONSTRATION :
C'est une conséquence du théorème de la moyenne. Soient $c < d \in I$ alors

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(\xi) \qquad \text{avec } \xi \in [c; d].$$

Donc

$$f'(\xi) \geqslant 0 \Longleftrightarrow f(d) \geqslant f(c).$$

De plus, si $f'(\xi) > 0$ alors $f(d) > f(c)$. □

Définition 4.23.
- $x_0 \in D_f$ est un **maximum absolu** de f si $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x \in D_f$.
- $x_0 \in D_f$ est un **maximum relatif (ou local)** s'il existe un voisinage

$$v_\epsilon(x_0) =]x_0 - \epsilon\,;\, x_0 + \epsilon[$$

de x_0 tel que $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x \in v_\epsilon(x_0)$.

Définitions analogues pour le minimum.

On dira **extremum** pour maximum ou minimum.

ATTENTION : Un extremum absolu n'existe pas toujours sur $\mathbb{R}$. Exemple : $f(x) = \arctan x$.

Théorème 4.24. *Si x_0 est un extremum de $f(x)$ sur $I = [a; b]$, alors*

(i) soit $x_0 = a$ ou $x_0 = b$

(ii) ou $f'(x_0) = 0$

(iii) ou $f'(x_0)$ n'existe pas.

Définition 4.25. Un point x_0 tel que $f'(x_0) = 0$ est appelé un **point stationnaire**.

Un point stationnaire n'est pas nécessairement un extremum.
Exemple : $f(x) = x^3$. Alors $f'(x) = 3x^2$ et donc $f'(0) = 0$. Mais $x_0 = 0$ n'est pas un extremum mais un **plat**.

La condition nécessaire et suffisante pour avoir un extremum en x_0 est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.26. *Soit $f(x)$ une fonction dérivable dans un voisinage de x_0 mais pas nécessairement en x_0. Alors*

$$x_0 \text{ est un extremum} \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x) \text{ change de signe en } x_0.$$

Plus précisément si

(i) $f'(x) < 0$ (respextivement > 0) sur $]x_0 - \delta\,;\, x_0[$ et si

(ii) $f'(x) > 0$ (respectivement < 0) sur $]x_0\,;\, x_0 + \delta[$

alors x_0 est un minimum local (respectivement un maximum local).

Démonstration : C'est une conséquence du théorème 4.22. □

Un cas particulier de ce théorème est le suivant :

Proposition 4.27. *Soit f une fonction continue et x_0 un point stationnaire ($f'(x_0) = 0$).*
(1) Si $f''(x) > 0$ dans un voisinage de x_0, alors x_0 est un minimum local .

(2) Si $f''(x) < 0$ dans un voisinage de x_0 alors x_0 est un maximum local.

(3) Si $f''(x)$ change de signe en x_0 alors x_0 est un plat.

Démonstration :
(i) Le théorème de la moyenne appliqué à la fonction $f'(x)$ et à l'intervalle $]x_0\,;\, x_0 + h[$ donne

$$\frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} = f''(\xi)$$

avec ξ entre x_0 et $x_0 + h$ donc $\xi = x_0 + \theta h$ où $0 < \theta < 1$. Ceci donne

$$f'(x_0+h) = \underbrace{f'(x_0)}_{=0} + h \cdot \underbrace{f''(x_0+\theta h)}_{>0} = \begin{cases} > 0 & \text{si } h > 0 \\ < 0 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

Ainsi $f'(x)$ change bien de signe en x_0 et x_0 est un minimum local.
(ii) idem □

Exemple 4.28. $f(x) = 2x^2 + 10$

$$f'(x) = 4x \qquad f''(x) = 4 \qquad \Longrightarrow f'(0) = 0 \qquad f''(0) = 4 > 0.$$

Le point $x = 0$ est donc un minimum.

ATTENTION :

$$\begin{array}{rcl} f'(x_0) = 0 & \not\Longrightarrow & x_0 \text{ est un extremum} \\ x_0 \text{ est un extremum} & \not\Longrightarrow & f'(x_0) = 0 \end{array}$$

Exemple 4.29. $f(x) = x^3(x^3 - 1)^{\frac{2}{3}}$.

$$f'(x) = 3x^2(x^3-1)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^3(x^3-1)^{-\frac{1}{3}}3x^2 = \frac{x^2}{(x^3-1)^{\frac{1}{3}}}(5x^3 - 3).$$

Tableau de signe :

En $x = 1$: $f'(x)$ n'existe pas mais f' change de signe $\longrightarrow$ extremum.
En $x = 0$: $f'(0) = 0$ mais f' ne change pas de signe $\longrightarrow$ pas d'extremum mais un plat.
En $x = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$, on a $f' = 0$ et change de signe. $\longrightarrow$ extremum.

4.5.2 Courbure et point d'inflexion

Définition 4.30. Soit $f \in C^2(I)$. f est dite **convexe** sur I si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, c'est-à-dire si $f'(x)$ est croissante sur I.

f est dite **concave** sur I si $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, c'est-à-dire si $f'(x)$ est décroissante sur I.

Autre caractérisation

1) Le graphe d'une fonction convexe (resp. concave) est toujours situé au dessous (resp. au-dessus) de la corde PQ où P et Q sont deux points du graphe.

2) Le graphe d'une fonction convexe (resp. concave) est toujours situé au dessus (resp. au-dessous) de ses tangentes.
Graphes :

Définition 4.31 (Point d'inflexion)**.** Soit f une fonction. Alors $x_0 \in D_f$ est un point d'inflexion de f si $\underline{f''(x) \text{ change de signe en } x_0}$.

ATTENTION : Comme pour les extremums, il ne suffit pas que $f''(x_0) = 0$.

Propriété géométrique : en un point d'inflexion, le graphe **passe de l'autre côté de la tangente** en ce point.

Exemple 1 : $f(x) = \sqrt[3]{x}$. $\quad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad f''(x) = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$.
f'' change de signe en $x = 0$ bien que $f'(0)$ n'existe pas en ce point (la tangente est verticale). On a donc un point d'inflexion.

Exemple 2 : $f(x) = x^4 - x$. $\quad f'(x) = 4x^3 - 1 \quad f''(x) = 12x^2$.
On a $f''(0) = 0$ mais f'' ne change pas de signe. Pas de point d'inflexion en 0.

4.6 Développement limité et série de Taylor

4.6.1 Définitions

Lemme 4.32 (Approximation linéaire)**.** *Pour $a \in D_f$ fixé, on a*

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h)} \qquad (*)$$

où $r(h)$ est une fonction satisfaisant

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Démonstration : Posons $r(h) = f(a+h) - f(a) - hf'(a)$. Alors

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

et on a bien $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h} = f'(a) - f'(a) = 0.$ □

En posant $x = a + h$, l'équation (*) devient

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + R_1(x)}$$

avec $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R_1(x)}{x-a} = 0.$

On va généraliser ce résultat en approximant une fonction par un polynôme de degré n :

Théorème 4.33 (Approximation d'ordre n).
Soit $f(x) \in C^n(I)$ et $a \in I$ un point intérieur de I. Alors

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n}_{=T_n^f(x)} \quad + \quad R_n(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$

De plus, si $f \in C^{n+1}(I)$, alors $\quad R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}(x-a)^{n+1}$ *avec ξ entre a et x.*

Démonstration :

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n \qquad \text{et donc} \\
R_n'(x) &= f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)\,!}(x-a)^{n-1} \\
R_n''(x) &= f''(x) - f''(a) - f^{(3)}(a)(x-a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)\,!}(x-a)^{n-2} \\
&\vdots \\
R_n^{(n)}(x) &= f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) \\
R_n^{(n+1)}(x) &= f^{(n+1)}(x)
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$R_n'(a) = R_n''(a) = \cdots = R_n^{(n)}(a) = 0.$$

Pour calculer $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R_n(x)}{(x-a)^n}$, on applique n fois la règle de Bernoulli-L'Hospital :

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to a} \frac{R_n'(x)}{n\cdot(x-a)^{n-1}} \overset{\text{B.-H.}}{=} \cdots \overset{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x\to a} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n\,!} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a)}{n\,!} = 0.$$

Ceci démontre la première partie du théorème.

Si $f \in C^{n+1}(I)$, on pose $h(x) = (x-a)^{n+1}$ et on applique le théorème de Cauchy $n+1$ fois. Ceci donne (en remarquant que $h(a) = h'(a) = h''(a) = \cdots h^{(n)}(a) = 0$)

$$\begin{aligned}\frac{R_n(x)}{h(x)} &= \frac{R_n(x)-R_n(a)}{h(x)-h(a)} \overset{\textit{Cauchy}}{=} \frac{R_n'(\xi_1)}{h'(\xi_1)} = \frac{R_n'(x)-R_n'(a)}{h'(x)-h'(a)} \overset{\textit{Cauchy}}{=} \frac{R_n''(\xi_2)}{h''(\xi_2)} \\ &= \cdots = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{h^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!} \qquad \xi \in]a;x[\end{aligned}$$

Ceci donne finalement

$$R_n(x) = h(x)\cdot\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}\cdot(x-a)^{n+1}.$$

□

Définition 4.34. Le polynôme

$$T_n^f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n$$

est appelé le **développement limité d'ordre** n **de** $f(x)$ **au point** a ou aussi le **polynôme de Taylor de degré** n.
La fonction $R_n(x)$ est le **reste d'ordre** n.

Si $a = 0$ on obtient le développement autour du point 0 :

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}\cdot x^n \quad + \quad R_n(x)}$$

avec $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)\,!}\,x^{n+1}$ et $0 < \theta < 1$.

Exemple 4.35.
$f(x) = \cos x$, $a = 0$, $n = 3$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + R_3(x) \\ &= 1 + 0\cdot x - \frac{1}{2}x^2 + 0\cdot x^3 + R_3(x) = \underbrace{1-\frac{1}{2}x^2}_{=T_3(x)} + R_3(x)\end{aligned}$$

Série de Taylor

Si $f \in C^\infty(I)$ et si $R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ pour tout $x \in I$, on obtient la série de Taylor en a qui converge vers $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k}$$

Notation de Landau

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions s'annulant en a. On dit que

$$f = o(g) \qquad \text{en } x = a \qquad \text{si } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Exemples :

- $52x^3 = o(x^2)$ (en $a = 0$) car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{52x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 52x = 0$.
- $1 - \cos x = o(x)$ car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$ (cf. formulaire et tables)

Avec cette notation, on a

$$\boxed{R_n(x) = o(x^n)}$$

pour le développement limité autour de $a = 0$.

Propriétés :
A) Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$ alors $f = o(h)$.

B) Si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$ alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.

C) Si $f = o(g)$ et $h = o(g)$ alors $f \pm h = o(g)$.

ATTENTION :
$o(g) - o(g) \neq 0$.
Exemple : $4x^3 = o(x^2)$ et $x^3 = o(x^2)$ mais $4x^3 - x^3 = 3x^3 = o(x^2)$.

4.6.2 Exemples

1. Soit $f(x) = e^x$ et $a = 0$.
   Comme $f'(x) = e^x = f^{(k)}(x)$ pour tout $k \geqslant 1$, le développement limité d'ordre n est donné par

$$\begin{aligned} e^x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n + R_n(x) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n\,!}x^n + R_n(x) \end{aligned}$$

   avec $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)\,!}x^{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}e^{\theta x}$.

$R_n(x)$ converge vers 0 pour tout x lorsque $n \to \infty$ (cf. chapitre 2). Donc la série de Taylor converge vers f et on a

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k\,!}\, x^k \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Développement limité d'ordre 1 :
on a $e^x = 1 + x + o(x)$. Ceci donne $e^x - 1 = x + o(x)$ et donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} 1 + \frac{o(x)}{x} = 1$$

par définition de $o(x)$. Ainsi autour de $x = 0$, on a $e^x - 1 \approx x$.

2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $a = 0$.

On a $f(0) = 1$ et

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} && \Longrightarrow && f'(0) = -1 \\
f''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} && \Longrightarrow && f''(0) = 2 \\
& && \vdots && \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{n\,!}{(1+x)^n} && \Longrightarrow && f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot n\,!
\end{aligned}$$

Le développement limité d'ordre n autour de $a = 0$ est alors

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + R_n(x)$$

avec

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!} \cdot \xi^{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\xi^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}.$$

ce qui donne la série de Taylor

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k \qquad \forall x \in]-1;1[$$

C'est une série géométrique (de raison $-x$) qui converge si et seulement si $|x| < 1$. Pour ces valeurs de x, on peut montrer que $R_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ et donc la série de Taylor converge vers f.

3. $f(x) = \sin x$ et $a = 0$.
On obtient le développement limité suivant :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + o(x^7)$$

avec $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)\,!}x^{n+1}$ qui converge vers 0 lorsque $n \to \infty$ et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $|f^{(n+1)}(\theta x)| \leqslant 1$. On obtient donc la série de Taylor du sinus :

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

4. On montre de même que

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + o(x^6) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)\,!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

5. Soit $f(x) = \ln(1+x)$ et $a = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x} & \Longrightarrow \quad & f'(0) = 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} & \Longrightarrow \quad & f''(0) = -1 \\
f^{(3)}(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} & \Longrightarrow \quad & f^{(3)}(0) = 2 \\
&\vdots & & \\
f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)\,!}{(1+x)^n} & \Longrightarrow \quad & f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)\,!
\end{aligned}$$

On obtient la série de Taylor :

$$\begin{aligned}f(1+x) &= f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}\,x^n + \ldots \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\,\frac{x^k}{k}\end{aligned}$$

qui converge pour $-1 < x \leqslant 1$.
Si $x = 1$, on obtient

$$\boxed{\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ \ldots}$$

C'est la **série harmonique alternée**.

Dérivée d'une série de Taylor

Si $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ alors

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}.$$

On peut <u>dériver termes à termes</u>.

Exemple 4.36. Considérons la série

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ \dots$$

On a alors

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots \overset{\text{série géom.}}{=} \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in]-1;1[$$

Mais $\dfrac{1}{1+x^2}$ est la dérivée de $\arctan x$ donc $f(x) = \arctan x + C$. Comme $f(0) = 0 = \arctan(0)$, la constante C vaut 0. On a ainsi trouvé la série de Taylor de $\arctan x$:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad \forall x \in]-1;1]$$

Si l'on pose $x = 1$, on a

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ \dots}$$

4.6.3 Opérations sur les développements limités

Soient f et g deux fonctions admettant $T_n^f(x)$ et $T_n^g(x)$ comme développements limités d'ordre n autour de $a = 0$.
Alors

- $T_n^{f+g}(x) = T_n^f(x) + T_n^g(x)$
- $T_n^{fg}(x) = T_n^f(x) \cdot T_n^g(x)$ (en ne gardant que les termes de degré $\leqslant n$)
- Si $f(0) = 0$, alors $T_n^{g\circ f}(x) = T_n^g(T_n^f(x))$.
- Le développement limité de $\dfrac{f}{g}$ s'obtient en faisant la division du polynôme $T_n^f(x)$ par le polynôme $T_n^g(x)$ **en commençant par les termes de degrés les plus bas**.

Exemples 4.37.

1. Développement limité d'ordre 3 de $\sin(e^x - 1)$ en $a = 0$:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3\,!} + o(x^3) \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\,!} + o(x^3) \qquad \Longrightarrow \qquad e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\,!} + o(x^3) \\
\sin(e^x - 1) &= [e^x - 1] - \frac{(e^x-1)^3}{3\,!} + o(x^3) \\
&= \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\,!}\right] - \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^2}{2} + \dots\right)^3 + o(x^3) \\
&= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\,!} - \frac{1}{6}\left(x^3 + 3\frac{x^4}{2} + o(x^3)\right) + o(x^3) \\
&= x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).
\end{aligned}$$

2. Développement d'ordre 3 de $\ln(1+\arctan x)$ en $a=0$:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\ln(1+\arctan x) &= \arctan x - \frac{\arctan^2 x}{2} + \frac{\arctan^3 x}{3} + \dots \\
&= x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3 + o(x^3) \\
&= x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\
&= x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)
\end{aligned}$$

3. Développement limité d'ordre 3 de $f(x) = \dfrac{\cos x + x^2}{1 - \sin x}$ en $a=0$:

$$\cos x + x^2 = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) + x^2 = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$1 - \sin x = 1 - x + \frac{x^3}{3\,!} + o(x^3)$$

Division euclidienne :

Donc $f(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$.

4.6.4 Application : calcul de limite

Le développement limité permet de calculer des limites indéterminées.

Exemples :

1) Le développement limité d'ordre 3 du sinus est $\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + o(x^3)$. Alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3\,!} + o(x^3)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 - \frac{x^2}{3\,!} + \frac{o(x^3)}{x} = 1.$$

2) De même on a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \Longrightarrow \quad 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)-3\sin x}{x(1-\cos x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{3x-\frac{(3x)^3}{3!}-3(x-\frac{x^3}{3!})+o(x^3)}{x[1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))]}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-4x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{2}+o(x^4)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-4+o(x^3)/x^3}{\frac{1}{2}+o(x^4)/x^3}=-8.\end{aligned}$$

4.6.5 Application aux extremums

Soit $f(x)$ une fonction et a un point stationnaire. On peut utiliser le développement limité de $f(x)$ autour de a pour déterminer la nature de a et obtenir le résultat suivant :

Théorème 4.38. *Soit $f(x) \in C^n(I)$ avec $n \geqslant 2$ telle que*
- $f'(a) = 0$
- $f^{(k)}(a) = 0$ *pour* $1 \leqslant k < n$ *et*
- $f^{(n)}(a) = C \neq 0$. *Alors*

1 si n est pair et $C > 0$, a est un minimum (local) ;

2 si n est pair et $C < 0$, a est un maximum (local) ;

3 si n est impair, a est un point d'inflexion et donc un plat.

Exemples :
A) Soit $f(x) = x - \sin x$. Alors le développement limité autour de $x = 0$ est

$$f(x) = x - \sin x = x - (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)) = \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

On a donc $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et $f^{(3)}(0) = 1$. La première dérivée non nulle est la 3ème. On a donc un plat en $x = 0$ par le point 3 du théorème.
B) Soit $f(x) = \cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{4!} + \dots$.
Alors $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$ et $f^{(4)}(0) = -\frac{1}{2}\cdot 4! = -12$. On a donc $n = 4$ et $C = -12 < 0$ ce qui montre que $x = 0$ est un maximum par le point 2 du théorème.

Remarque 4.39. Le développement limité de $f(x)$ d'ordre n permet de retrouver $f^{(k)}(a)$ pour tout $k \leqslant n$.

4.6.6 Formule d'Euler

On a $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$
Si l'on pose $x = i\alpha$ on obtient

$$\begin{aligned}e^{i\alpha} &= 1 + i\alpha + \frac{(i\alpha)^2}{2} + \frac{(i\alpha)^3}{3!} + \frac{(i\alpha)^4}{4!} + \dots\\ &= 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots\\ &\quad + i\cdot\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots\right)\\ &= \cos\alpha + i\sin\alpha.\end{aligned}$$

On a ainsi **démontré** la formule d'Euler :

$$\boxed{e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha.}$$

On en déduit les 2 formules :

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}} \qquad \boxed{\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}}$$

4.7 Résolution numérique d'équations : méthode de Newton

On cherche à résoudre l'équation

$$f(x) = 0$$

sur l'intervalle I, en supposant que $f \in C^2(I)$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Soit x^* la solution (que l'on cherche).

On choisit x_1 proche de x^* et on approxime la fonction f par sa tangente :

Equation de la tangente : $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$.

Intersection avec l'axe Ox :

$$0 = f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1)$$

ce qui donne

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

En répétant la construction, on trouve la relation récurrente :

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \qquad (*)$$

On peut démontrer, que si x_1 est choisi proche de x^* alors <u>la suite des x_n converge vers x^*</u>.

Exemples 4.40.

(1) On cherche à résoudre l'équation $x = \cos x$.
On prend $f(x) = x - \cos x$. Alors $f'(x) = 1 + \sin x$ et

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}.$$

Si l'on part avec $x_1 = \frac{1}{2}$ alors on obtient
$x_2 = 0.755222$ $x_3 = 0.73914166$
$x_4 = 0.739085$ $x_5 = 0.739085133$

(2) Cherchons à calculer $\sqrt[p]{c}$, $c \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{N}^*$.
On prend

$$f(x) = x^p - c \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = px^{p-1}$$

et l'équation (*) devient

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^p - c}{px_n^{p-1}} = (1 - \frac{1}{p})x_n + \frac{c}{p}\frac{1}{x_n^{p-1}}.$$

Si $c \in \mathbb{Q}_+$ et x_1 est choisi dans $\mathbb{Q}_+$, alors les x_n forment <u>une suite rationnelle qui converge vers $\sqrt[p]{c}$</u>.

Exemple : $p = 3$, $c = 2$. On veut approcher $\sqrt[3]{2}$. L'algorithme devient

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{2}{3x_n^2}.$$

$x_1 = 1$ $x_2 = \frac{4}{3}$ $x_3 = \frac{91}{72}$ $x_4 = \frac{1126819}{894348}$ $x_5 = 1.25992105002$

Pour x_5, l'erreur est de 10^{-10}.

Problème possible :

Exemple :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$$

En partant de $x_0 = -1.905985711$, on trouve
$x_1 = 0.337561961$
$x_2 = -1.905985711$
$x_3 = 0.337561961$
$x_4 = -1.9059857105$
$x_5 = 0.337561948$

Chapitre 5

Calcul intégral

5.1 L'intégrale définie

5.1.1 Définition par sommes de Riemann

Soit $f \in C^0[a;b]$ positive. On cherche à calculer l'aire S du domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox ainsi que les droites $x = a$ et $x = b$.

On partage l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles I_1, I_1, $\ldots I_n$ de façon arbitraire $I_k = [x_{k-1};\, x_k]$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$.

On choisit ensuite un $\xi_k \in I_k$ de façon toujours arbitraire. Notons $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ la largeur de l'intervalle I_k et soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

la somme des surfaces rectangulaires déterminées par I_k et $f(\xi_k)$.
C'est une approximation de l'aire cherchée et cette approximation est d'autant meilleure que les Δx_k sont petits et donc que le nombre d'intervalles n est grand. A la limite (si elle existe), on obtiendra l'aire cherchée S. On pose alors la définition suivante :

Définition 5.1 (Fonction intégrable)**.** La fonction $f(x)$ est dite **intégrable** sur $[a;\, b]$ si la limite

$$S = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \sup_k \Delta x_k \to 0}} S_n$$

existe et ceci **indépendamment du choix** des x_k et des ξ_k. On note cette limite

$$\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Remarque 5.2. On peut montrer, que pour qu'une fonction $f(x)$ soit intégrable, il suffit de montrer la convergence des suites S_n pour deux choix particuliers des ξ_n. En effet, posons

$$M_k = \sup_{x\in I_k} f(x) \qquad\qquad m_k = \inf_{x\in I_k} f(x)$$

Alors $m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$ pour tout choix de $\xi_k \in I_k$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k}_{=S_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k.$$

Si les termes de gauche et de droite converge vers la même limite S lorsque $n \to \infty$ et $\Delta x_k \to 0$, alors par le théorème des gendarmes, la somme S_n converge également vers S (pour tout choix des ξ_k) et f est ainsi intégrable.

Remarque 5.3. Si $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [a;b]$ et f est intégrable, alors on a

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant 0.$$

Ainsi $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ est une **aire algébrique** affectée d'un signe. Les domaines au-dessous de l'axe Ox sont comptés négativement.

5.1.2 Propriétés de l'intégrale définie

(1) $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0$

(2)

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$$
$$\Longrightarrow \qquad \int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$$

(3) Linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\, dx \quad + \quad \beta \cdot \int_a^b g(x)\, dx$$

(4) Si $a \leqslant b$ et $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in [a;b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx$$

(5)

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Démonstration : Ceci découle du point (4) et de l'inégalité

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

pour tout $x \in [a;b]$.

(6) Inégalité de Schwarz :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \;\cdot\; \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

DÉMONSTRATION : Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\displaystyle\int_a^b (f(x) - tg(x))^2\,dx \geqslant 0$ ce qui donne

$$\int_a^b (f^2(x) - 2tf(x)g(x) + t^2g^2(x))\,dx \geqslant 0$$

et par (3)

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \;-\; 2t\int_a^b f(x)g(x)\,dx \;+\; t^2\int_a^b g^2(x)\,dx \geqslant 0$$

et ceci pour tout t. Le discriminant de cette équation du 2ème degré en t doit donc être négatif ou nul. Ainsi

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx \leqslant 0.$$

□

Remarque 5.4. La variable d'intégration est une variable muette. Son changement n'affecte en rien la valeur de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du.$$

Définition 5.5. f est **continue par morceaux** sur $I = [a;b]$ s'il existe $I_k = [x_{k-1};x_k]$ $k = 1, 2, \ldots, n$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$ de telle sorte que $f(x)$ soit continue sur chaque intervalle ouvert $]x_{k-1};x_k[$, continue à gauche en x_1, x_2, …, x_n et continue à droite en chaque x_0, x_1, …, x_{n-1}.

Théorème 5.6. *Toute fonction continue par morceaux est intégrable.*

Sans démonstration.

5.1.3 Théorème fondamental du calcul intégral

Dans cette section, nous allons montrer le lien entre l'intégrale définie et la dérivée.

Lemme 5.7 (Théorème de la moyenne du calcul intégral)**.** *Soit $I = [a;b]$, $f \in C^0(I)$. Alors il existe $\xi \in I$ tel que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$

DÉMONSTRATION :
Soit $m = \inf_{x\in I} f(x)$ et $M = \sup_{x\in I} f(x)$. Alors

$$m \cdot (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M \cdot (b-a).$$

et donc

$$f(x_m) = m \leqslant \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{=c} \leqslant M = f(x_M).$$

Comme f est continue, il existe un $\xi \in I$ avec $f(\xi) = c$ par le corollaire du théorème de Bolzano (chapitre 3). □

Appliqué à l'intervalle $[x; x+h]$ ce lemme assure l'existence d'un $\xi = x + \theta h$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$ avec

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = h \cdot f(x+\theta h). \qquad (*)$$

Théorème 5.8 (Théorème fondamental du calcul intégral)**.** *Soit $I = [a; b]$ et $f \in C^0(I)$. Posons*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Alors $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

DÉMONSTRATION :
Reprenons la définition de la dérivée :

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)\,dt \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(x+\theta h) \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \quad \text{par (*)} \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+\theta h) \\
&= f(x) \qquad \text{car } f \text{ est continue.}
\end{aligned}$$

□

En d'autres termes, on a

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)}$$

Explication intuitive :

$dF(x) = F(x+h) - F(x) = dx \cdot f(x) \implies \dfrac{dF(x)}{dx} = f(x).$

Théorème 5.9. *Soit $f(x)$ intégrable sur $I = [a;b]$ et $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$. Alors*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b}$$

DÉMONSTRATION : Posons $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.
Alors par le théorème précédent, on a $\Phi'(x) = f(x) = F'(x)$. Ainsi $\Phi(x) = F(x) + c$ (cf. chapitre 4).
Or $\Phi(a) = 0 \implies F(a) + c = 0 \implies c = -F(a)$. Donc $\Phi(x) = F(x) - F(a)$. On en déduit que

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

□

Corollaire 5.10. *Soit $f(x)$ une fonction continue et $\phi(x)$ une fonction dérivable. Alors*

(a)

$$\frac{d}{dx}\left[\int_x^a f(t)\,dt\right] = -f(x)$$

(b)

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt\right] = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$$

5.2 Primitives

5.2.1 Définition et propriétés

Définition 5.11. Soit $f(x)$ une fonction. Une **primitive** de $f(x)$ est une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$.

Remarque 5.12. Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors

$$G(x) = F(x) + c$$

en aussi une primitive de $f(x)$. Réciproquement, deux primitives d'une même fonction ne diffèrent que d'une constante (cf. chapitre 4 : $f'(x) \equiv 0 \implies f(x) \equiv c$).

La section qui précède a montré que le calcul d'une intégrale définie se ramène au calcul d'une primitive.
De ce fait, on note

$$\int f(x)\, dx$$

l'ensemble de toutes les primitives de $f(x)$, que l'on appelle aussi **intégrale indéfinie**.

Déterminer les primitives d'une fonction est un problème difficile.

Le théorème du calcul intégral montre que toute fonction continue possède une primitive. Mais il existe des fonctions analytiques continues qui n'ont pas de primitives **analytiques** comme par exemple $f(x) = e^{-x^2}$.
Linéarité de la primitive : la linéarité de la dérivée implique celle de la primitive :

$$\boxed{\int \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \cdot \int f(x)\, dx + \beta \cdot \int g(x)\, dx.}$$

5.2.2 Recherche des primitives

Primitives de quelques fonctions élémentaires

(I) Fonctions puissances Pour $q \neq -1$, on a

$$\int x^q\, dx = \frac{1}{q+1} \cdot x^{q+1} + C$$

et

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C.$$

(II) Fonction exponentielle :

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C.$$

(III) Fonctions trigonométriques :

$$\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C \qquad \int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$$

(IV) etc...

Recherche par calcul direct

On obtient certaines primitives en transformant la fonction à intégrer de telle sorte à faire apparaître une forme connue de dérivée :

Exemples 5.13.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{px+q}}\, dx =?$. On sait que $(\sqrt{px+q})' = \frac{p}{2\sqrt{px+q}}$. On a donc

$$\int \frac{1}{\sqrt{px+q}}\, dx = \int \frac{2}{p} \cdot \frac{p}{2\sqrt{px+q}}\, dx = \frac{2}{p} \cdot \int \frac{p}{2\sqrt{px+q}}\, dx = \frac{2}{p}\sqrt{px+q} + C.$$

(2)
$$\int \cos^2(px)\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos(2px))\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4p}\sin(2px) + C.$$

(3)
$$\int \frac{x^2+x+1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{x^2+1+x}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+1}\,dx = \ln|x| + \arctan(x) + C.$$

Plus généralement, comme $(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$, on a la formule

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) \;\; + \;\; C} \tag{5.1}$$

où $F(u)$ est une primitive de $f(u)$.

Une méthode pour intégrer est donc de mettre l'intégrant sous la forme $f(g(x)) \cdot g'(x)$ en sachant trouver une primitive de f.
Il est donc important lors du calcul d'une intégrale de repérer les dérivées internes $(= g'(x))$.

Exemples 5.14.

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{1/2} \; + \; C$

$= \sqrt{x^2+1} \; + \; C.$
On a utilisé le principe précédent avec $f(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$ et $g(x) = x^2+1 \quad \Longrightarrow \quad g'(x) = 2x.$

(2) On veut calculer $\displaystyle\int \cos x \sin^3 x\,dx$. On voit que $\cos x$ est la dérivée de $\sin x$. On pose donc $g(x) = \sin x$ et $f(u) = u^3$ dont on connaît une primitive : $F(u) = \frac{1}{4}u^4$. Alors

$$\int \underbrace{\cos x}_{g'(x)} \underbrace{\sin^3 x}_{f(g(x))}\,dx = F(g(x)) + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$$

En appliquant la formule 5.1 à des fonctions f particulières, on obtient les formules suivantes :

(I)
$$\int g'(x)e^{g(x)}\,dx = e^{g(x)} + C.$$

(II)
$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C.$$

(III)
$$\int g'(x)[g(x)]^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} \cdot [g(x)]^{\alpha+1} + C \qquad \alpha \neq -1.$$

(IV)
$$\int \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}\,dx = \arctan[g(x)] + C.$$

(V)

$$\int g'(x)\cos(g(x))\,dx = \sin[g(x)] + C.$$

(VI) etc...

Intégration par parties

On sait que $(fg)' = f'g + fg'$ ce qui donne $f'g = (fg)' - fg'$. En intégrant des deux côtés on obtient la règle d'**intégration par parties** :

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.} \qquad \text{(I.P.P.)}$$

Exemples 5.15.

(1)

$$\int xe^x\,dx \overset{\text{I.P.P.}}{=} xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

avec $f' = e^x$ et $g = x$.

(2) $\displaystyle\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C$ (cf. exercices)

(3)

$$\begin{aligned}\int \sin(x)e^x\,dx &\overset{\text{I.P.P.}}{=} \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x\,dx \\ &\overset{\text{I.P.P.}}{=} \sin(x)e^x - \left[\cos(x)e^x - \int -\sin(x)e^x\,dx\right] \\ &= (\sin x - \cos x)e^x - \int \sin(x)e^x\,dx\end{aligned}$$

On obtient (en passant le terme $-\int \sin(x)e^x\,dx$ de l'autre côté)

$$2 \cdot \int \sin(x)e^x\,dx = (\sin x - \cos x)e^x$$

et donc

$$\int \sin(x)e^x\,dx = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + C\,.$$

(4)

$$\begin{aligned}\int \arctan x\,dx = \int 1\cdot\arctan x\,dx &\overset{\text{I.P.P.}}{=} x\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

en posant $f' = 1$ et $g = \arctan x$.

Intégration par changement de variable

Théorème 5.16. *Soit $f(x)$ une fonction continue sur un intervalle I et $\varphi : [\alpha;\beta] \longrightarrow I$ une fonction de classe C^1 avec $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$. Alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

La transformation $x = \varphi(t)$ s'appelle **un changement de variable**.

On effectue donc les trois substitutions suivantes :

$$\boxed{(i)\ \ x = \varphi(t)}$$

$$\boxed{(ii)\ \ dx = \varphi'(t)\,dt}$$

$$\boxed{\text{(iii) ET on change les bornes d'intégration.}}$$

Démonstration : Soit $G(x) = \displaystyle\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt$ et $g(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$. Alors par le corollaire 5.10, on a

$$G'(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = g(x).$$

La fonction $G(x)$ est donc une primitive de $g(x)$. Il s'ensuit que

$$\int_\alpha^\beta g(t)\,dt = G(t)\Big|_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$$

ce qui donne

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_a^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx - \int_a^{\varphi(\alpha)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx\,.$$

□

Remarque 5.17. Ce changement de variable est également valable pour calculer une primitive de $f(x)$ **à condition de pouvoir inverser la fonction** $\varphi(t)$ c'est-à-dire de pouvoir écrire $t = \varphi^{-1}(x)$.

Exemples 5.18.

1. Calculons $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

   On pose

   $$x = \tan t \qquad\Longrightarrow\qquad dx = (1+\tan^2 t)\,dt$$

   avec $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$.
   Et comme $\tan(0) = 0$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, on a

   $$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2 t)\sqrt{1+\tan^2 t}}(1+\tan^2 t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos t|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\,dt = \sin t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Comme φ est inversible sur l'intervalle considéré, cet exemple permet de trouver une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.
En effet, on a $t = \arctan x$, ce qui donne

$$F(x) = \sin t = \sin(\arctan x) + C.$$

2. $\displaystyle\int x^3(1-x^2)^{5/2}\,dx = \quad ?$

On a $x \in [-1;1]$. On pose $x = \sin t$ avec $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

$$x = \sin t \quad \Longrightarrow \quad dx = \cos t\,dt$$

$$t = \arcsin x \quad \Longrightarrow \quad \cos t = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\int x^3(1-x^2)^{5/2}\,dx &= \int \sin^3 t\cdot(1-\sin^2 t)^{5/2}\cdot\cos t\;dt = \int \sin^3 t\cdot\cos^5 t\cdot\cos t\;dt\\ &= \int \sin t\cdot(1-\cos^2 t)\cdot\cos^6 t\;dt = \int(\sin t\cos^6 t - \sin t\cos^8 t)\;dt\\ &= -\frac{1}{7}\cos^7 t + \frac{1}{9}\cos^9 t + C\\ &= \frac{1}{9}(1-x^2)^{9/2} - \frac{1}{7}(1-x^2)^{7/2} + C.\end{aligned}$$

5.2.3 Intégration des fonctions rationnelles

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle à intégrer.
On effectue les étapes suivantes :

<u>1ère étape</u> : si $deg(P) \geqslant deg(Q)$, on effectue la <u>division eulidienne</u> de $P(x)$ par $Q(x)$:

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$

ce qui donne $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$ avec cette fois-ci $deg(R) < deg(Q)$ et $D(x)$ intégrable.

Dans la suite, on ne considére donc que les fonctions rationnelles $\frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $\deg(P) < \deg(Q)$ et $Q(x) = x^n + \cdots + a_1x + a_0$ normalisé.

<u>2ème étape</u> : On sait que $Q(x)$ se factorise dans $\mathbb{R}$ en un produit de polynômes du premier degré et/ou du deuxième degré sans racines réelles :

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_p)^{m_p}(x^2+2A_1x+B_1)^{l_1}\cdots(x^2+2A_sx+B_s)^{l_s} \tag{5.2}$$

On décompose alors la fraction rationnelle $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en une somme de fractions simples, chaque terme dans (5.2) contribuant de la manière suivante :

$$(x-\alpha)^m \mapsto \frac{C_1}{x-\alpha} + \frac{C_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{C_m}{(x-\alpha)^m} \qquad \text{fractions simples de 1ère espèce}$$

$$(x^2+2Ax+B)^l \mapsto \frac{D_1x+E_1}{x^2+2Ax+B} + \frac{D_2x+E_2}{(x^2+2Ax+B)^2} + \cdots + \frac{D_lx+D_l}{(x^2+2Ax+B)^l}$$

fractions simples de 2ème espèce

3$^{\text{ème}}$ étape : On intègre chaque fraction simple (cf. plus bas).

Exemples pour la 2ème étape :

1)
$$\frac{x^2+x+4}{x^4-x^3+2x^2-2x} = \frac{x^2+x+4}{x(x-1)(x^2+2)} = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+2} \qquad (*)$$

- En multipliant (*) par x et en posant $x=0$, on obtient
$$\left.\frac{x^2+x+4}{(x-1)(x^2+2)}\right|_{x=0} = \left[C_1 + \frac{C_2x}{x-1} + \frac{(Dx+E)x}{x^2+2}\right]_{x=0}$$
$$\frac{4}{-1\cdot 2} = C_1$$

donc $C_1=-2$.

- En multipliant (*) par $x-1$ et en posant $x=1$, on obtient
$$\left.\frac{x^2+x+4}{x(x^2+2)}\right|_{x=1} = \left[\frac{C_1(x-1)}{x} + C_2 + \frac{(Dx+E)(x-1)}{x^2+2}\right]_{x=1}$$
$$\frac{6}{1\cdot 3} = C_2$$

donc $C_2 = 2$.

- En multipliant (*) par x et en faisant $x\to\infty$, on obtient
$$0 = C_1 + C_2 + D$$

donc $D=0$.

- On choisit une valeur particulière pour déterminer E. Par exemple, en posant $x=-1$, on a $\frac{4}{6} = -C_1 - \frac{C_2}{2} + \frac{E}{3}$ ce qui donne $E=-1$. En conclusion
$$\frac{x^2+x+4}{x(x-1)(x^2+2)} = -\frac{2}{x} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x^2+2}.$$

2)
$$\frac{x^3+5x+2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^3+5x+2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2}{(x-1)^2} + \frac{C_3}{x+1} + \frac{C_4}{(x+1)^2}.$$

- Multiplication par $(x-1)^2$ et $x:=1$: $\frac{8}{4} = C_2$
- Multiplication par $(x+1)^2$ et $x:=-1$: $\frac{-4}{4} = C_4 = -1$
- Multiplication par x et $x\to\infty$: $1 = C_1 + C_3$
- On pose $x=0$: $2 = -C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ donc $1 = C_3 - C_1$

Les 2 dernières équations donne : $C_3 = 1$ et $C_1 = 0$. Finalement
$$\frac{x^3+5x+2}{(x^2-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\ .$$

3ème étape : intégration des fractions simples

Les fractions simples ont toutes des primitives élémentaires :

Fractions simples de 1ère espèce :

- si $m \neq 1$ alors

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^m}\,dx = -\frac{1}{(m-1)} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{m-1}} + C$$

- sinon

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \ln|x-\alpha| + C$$

Fractions simples de 2ème espèce :

- $$\begin{aligned}\int \frac{Dx+E}{x^2+2Ax+B}\,dx &= \int \frac{\frac{D}{2}(2x+2A)+E-DA}{x^2+2Ax+B}\,dx \\ &= \frac{D}{2}\int \frac{2x+2A}{x^2+2Ax+B} \quad + \quad (E-DA)\int \frac{1}{(x+A)^2+B-A^2}\,dx \\ &= \frac{D}{2}\cdot \ln(x^2+2Ax+B) \quad + \quad \frac{E-DA}{\sqrt{B-A^2}} \cdot \int \frac{1/\sqrt{B-A^2}}{1+\left(\frac{x+A}{\sqrt{B-A^2}}\right)^2}\,dx \\ &= \frac{D}{2}\cdot \ln(x^2+2Ax+B) \quad + \quad \frac{E-DA}{\sqrt{B-A^2}} \arctan\left(\frac{x+A}{\sqrt{B-A^2}}\right) + C \end{aligned} \tag{5.3}$$

- $$\begin{aligned}\int \frac{Dx+E}{(x^2+2Ax+B)^2}\,dx &= \int \frac{\frac{D}{2}(2x+2A)+E-DA}{(x^2+2Ax+B)^2}\,dx \\ &= \frac{D}{2}\int \frac{2x+2A}{(x^2+2Ax+B)^2} \quad + \quad (E-DA)\int \frac{1}{(x^2+2Ax+B)^2}\,dx \\ &= -\frac{D}{2}\cdot \frac{1}{x^2+2Ax+B} \quad + \quad (E-DA)\cdot I\end{aligned}$$

Il reste à calculer

$$I = \int \frac{1}{(x^2+2Ax+B)^2}\,dx.$$

On pose $u = x + A$ et on applique la formule suivante :

$$\int \frac{1}{(u^2+\beta)^2}\,du = \frac{u}{2\beta(u^2+\beta)} + \frac{1}{2\beta\sqrt{\beta}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{\beta}}\right) + C.$$

La formule précédente peut être vérifiée directement ou s'obtient par parties. Plus généralement on a la formule récurrente :

$$\int \frac{1}{(u^2+\beta)^{n+1}}\,du = \frac{u}{2n\beta(u^2+\beta)^n} + \frac{2n-1}{2n\beta}\int \frac{1}{(u^2+\beta)^n}\,du.$$

Exemple complet : Calculons $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2}\,dx.$

1ère étape : division euclidienne : $7-2x^3=(-2)(x^3+x^2-2)+(2x^2+3)$ et donc

$$\frac{7-2x^3}{x^3+x^2-2}=-2+\frac{2x^2+3}{x^3+x^2-2}.$$

2ème étape : On factorise $Q(x)$: $Q(x)=x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$

Décomposition en fractions simples :

$$\frac{2x^2+3}{(x-1)(x^2+2x+2)}=\frac{C_1}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+2x+2}.$$

- Multiplication par $x-1$ et $x=1$: $\dfrac{5}{5}=C_1$ donc $C_1=1$.
- Multiplication par x et $x\to\infty$: $2=C_1+D$ donc $D=1$.
- $x=0$: $\frac{3}{-2}=-C_1+\frac{E}{2}$ donne $E=-1$.

Finalement

$$\frac{2x^2+3}{(x-1)(x^2+2x+2)}=\frac{1}{x-1}+\frac{x-1}{x^2+2x+2}$$

3ème étape : Intégration

$$\int\frac{1}{x-1}\,dx=\ln|x-1|+C$$
$$\int\frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-2\arctan(x+1)+C$$

en appliquant la formule (5.3) avec $A=1$, $B=2$, $D=1$ et $E=-1$. En mettant ces termes ensembles, on obtient

$$\begin{aligned}\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx&=\int -2+\frac{2x^2+3}{x^3+x^2-2}\,dx\\&=-2x+\int\frac{1}{x-1}\,dx\;+\int\frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx\\&=-2x+\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-2\arctan(x+1)+C.\end{aligned}$$

5.2.4 Intégration des fonctions rationnelles de fonctions trigonométriques

Pour intégrer une fonction de la forme $\dfrac{P(\sin x;\cos x)}{Q(\sin x;\cos x)}$, on effectue un des changements de variables suivants :

(a) $t=\sin x$ ou $t=\cos x$

(b) $t=\tan x$ ce qui donne $\sin x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\quad\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\quad$ et $\quad dx=\dfrac{1}{1+t^2}\,dt$

(c) $t=\tan\dfrac{x}{2}\Longrightarrow\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\quad\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\quad$ et $\quad dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt.$

Le dernier changement (c) fonctionne toujours mais peut être plus compliqué que les changements (a) et (b).

Exemple 5.19.

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan x}{2-\sin^2 x}\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos^2 x)}\,dx \qquad \text{changement (a) : } t=\cos x \text{ et } dt=-\sin x\,dx\\ &= -\int \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt = -\int (\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1})dt\\ &= \frac{1}{2}\ln(1+t^2)-\ln|t|+C = \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)-\ln|\cos x|+C.\end{aligned}$$

5.2.5 Quelques autres techniques

(A) $\sqrt{a^2-b^2x^2}$

Pour intégrer une fonction comportant des termes de la forme $\sqrt{a^2-b^2x^2}$ on peut parfois effectuer le changement de variable

$$x=\frac{a}{b}\sin t \qquad \Longrightarrow \qquad dx=\frac{a}{b}\cos t\,dt$$

ce qui donne $\sqrt{a^2-b^2x^2}=|a|\sqrt{1-\sin^2 t}=|a|\cos t$.

Exemple :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\; dt\\ &= \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t\; dt = \int \cos^2 t\,dt\\ &= \int \frac{1}{2}(1+\cos(2t))\,dt = \frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin(2t)+C\\ &\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{4}\sin(2\arcsin x)+C\end{aligned}$$

(B) $\sqrt{a^2+b^2x^2}$

Pour des fonctions comportant un terme de la forme $\sqrt{a^2+b^2x^2}$, on effectue le changement $x=\frac{a}{b}\sinh(t)$ ce qui donne $dx=\frac{a}{b}\cosh(t)\,dt$ et

$$\sqrt{a^2+b^2x^2}=|a|\sqrt{\cosh^2 t}=|a|\cosh t.$$

Exemple :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t\; dt\\ &= \int \cosh^2 t\; dt = \int \frac{1}{2}(t+\cosh(2t))\; dt\\ &= \frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sinh t+C\\ &= \frac{1}{2}\text{arcsinh}\, x+\frac{1}{4}\sinh(2\text{arcsinh}\, x)+C\end{aligned}$$

(C) Fonctions irrationnelles

Exemple : $$\int \frac{\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt[3]{x}}\,dx = ?$$

On pose
$$t=\sqrt[6]{x} \qquad \Longrightarrow \qquad x=t^6 \qquad \Longrightarrow \qquad dx=6t^5dt.$$

Ceci donne $\sqrt{x}=t^3$ et $\sqrt[3]{x}=t^2$. L'intégrale se transforme en une intégrale rationnelle :
$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt[3]{x}}\,dx &= \int \frac{t^3+1}{t^6-4t^2}\,6t^5\,dt\\ &= 6\int \frac{t^6+t^3}{t^4-4}\,dt = \dots\end{aligned}$$

5.3 Intégrales impropres

5.3.1 Définitions

On désire calculer des termes de la forme $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$. Quel sens donner à la borne ∞ ?

Définition 5.20. Soit $f(x)$ une fonction bornée et continue. On appelle **intégrale impropre** de **1ère espèce** une intégrale de $f(x)$ où l'une des bornes tend vers l'infini.
On pose
$$\Phi(\xi)=\int_a^\xi f(x)\,dx$$
et l'on calcule $\displaystyle\lim_{\xi\to\infty}\Phi(\xi)$. Si cette limite existe, on définit
$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{\xi\to\infty}\Phi(\xi).$$

On note parfois $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^\infty$ où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

Exemples 5.21.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx=\lim_{\xi\to\infty}\int_0^\xi e^{-x}\,dx=\lim_{\xi\to\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_0^\xi=\lim_{\xi\to\infty}\Big[1-e^{-\xi}\Big]=1.$

(2) Que vaut $\displaystyle\int_0^\infty \cos x\,dx$? On a
$$\int_0^\xi \cos x\,dx=\sin x\Big|_0^\xi=\sin\xi$$
et la limite $\displaystyle\lim_{\xi\to\infty}\sin\xi$ n'existe pas. Donc $\displaystyle\int_0^\infty \cos x\,dx$ n'existe pas.

Définition 5.22. Soit $f(x)$ une fonction continue sur $]a;b]$ avec $\displaystyle\lim_{x\to a^+}=\pm\infty$. On appelle intégrale impropre de 2ème espèce l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Si la limite existe, on pose

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx.$$

On note parfois

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big|_{a^+}^b$$

Ici $F(a^+)$ signifie $\lim\limits_{x\to a^+} F(x)$.

Exemples 5.23.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0^+}(2-2\sqrt{\epsilon}) = 2.$

(b) L'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

n'existe pas car

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln(1) - \ln(\epsilon) = -\ln(\epsilon)$$

et la limite quand $\epsilon \to 0^+$ n'existe pas (elle vaut $+\infty$).

Définitions :
- Si une intégrale impropre existe, on dit qu'elle **converge** ; sinon, elle **diverge**.
- Une intégrale impropre $\displaystyle\int_I f(x)\,dx$ est **absolument convergente** si $\displaystyle\int_I |f(x)|\,dx$ converge.

Ici, et dans la suite, on peut avoir $I = [a;\infty[$ ou $I =]-\infty;b]$.

Théorème 5.24. *Soit $f(x) \in C^0(I)$. Si $\displaystyle\int_I |f(x)|\,dx$ converge, alors $\displaystyle\int_I f(x)\,dx$ converge.*

Démonstration : Ceci découle de l'inégalité $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$ $\square$

Techniques d'intégration

Les intégrations par parties et par changement de variables s'appliquent aussi aux intégrales impropres :

Exemple 5.25. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\ dx \overset{\text{I.P.P.}}{=} -xe^{-x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-x}\ dx = 0 - \left[e^{-x}\right]_0^\infty = 1$

Quelques remarques importantes

(1) Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, il faut calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\xi\to-\infty}\int_{\xi}^{a} f(x)\,dx + \lim_{\xi\to\infty}\int_{a}^{\xi} f(x)\,dx$$

et NON PAS

$$\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\xi}^{\xi} f(x)\,dx.$$

Exemple : L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\sin x\,dx$ n'existe pas car les limites

$$\lim_{\xi\to-\infty}\int_{\xi}^{0}\sin x\,dx \qquad \text{et} \qquad \lim_{\xi\to\infty}\int_{0}^{\xi}\sin x\,dx$$

n'existent pas.
Il est FAUX de penser que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\sin x\,dx = 0$ parce que $\sin x$ est impaire.

(2) Pour calculer $\displaystyle\int_{0}^{3}\frac{1}{(x-2)^2}\,dx$, il faut calculer

$$\int_{0}^{2}\frac{1}{(x-2)^2}\,dx + \int_{2}^{3}\frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

car la fonction a un pôle en $x = 2$. Or

$$\int_{0}^{2}\frac{1}{(x-2)^2}\,dx = -\frac{1}{x-2}\bigg|_{0}^{2}$$

ne converge pas. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{3}\frac{1}{(x-2)^2}\,dx$ ne converge pas.

Le calcul

$$\int_{0}^{3}\frac{1}{(x-2)^2}\,dx = -\frac{1}{x-2}\bigg|_{0}^{3} = -1-\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

est FAUX.

5.3.2 Critères de convergence

Comme pour les séries, on a un critère de comparaison :

Théorème 5.26. *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions telles que $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ sur I.*
1) Si l'intégrale $\displaystyle\int_I |g(x)|\,dx$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(x)|\,dx$ converge.
2) Si l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(x)|\,dx$ diverge alors l'intégrale $\displaystyle\int_I |g(x)|\,dx$ diverge.

Ce théorème est très utile avec les résultats suivants :

Théorème 5.27.

$$\int_0^b \frac{1}{x^r}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-r}\,b^{1-r} & si\ r<1 \\ +\infty & si\ r \geqslant 1. \end{cases}$$

Donc l'intégrale $\int_0^b \frac{1}{x^r}\,dx$ *converge si et seulement si* $r<1$.

Démonstration : Pour $r \neq 1$, on a

$$\int_0^b x^{-r}\,dx = \frac{1}{1-r}x^{1-r}\Big|_0^b = \begin{cases} \frac{1}{1-r}\,b^{1-r} & \text{si } r<1 \\ +\infty & \text{si } r>1. \end{cases}$$

Si $r=1$, on a $\int_0^b \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_0^b = +\infty$. □

Exemple : le critère de comparaison permet d'affirmer que l'intégrale $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx$ converge car $\frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ pour $x \in]0;2]$.

Théorème 5.28. *Soient* $a>0$ *et* $r>0$. *Alors*

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^r}\,dx = \begin{cases} +\infty & si\ \ r \leqslant 1 \\ \frac{1}{r-1}\,a^{1-r} & si\ \ r>1. \end{cases}$$

Ainsi $\int_a^\infty \frac{1}{x^r}\,dx$ *converge si et seulement si* $r>1$.

Démonstration : Pour $r \neq 1$, on a

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^r}\,dx = \frac{1}{1-r}x^{1-r}\Big|_a^\infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ r<1 \\ \frac{1}{r-1}\,a^{1-r} & \text{si } \ r>1. \end{cases}$$

Pour $r=1$, on a $\int_a^\infty \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_a^\infty = +\infty$. □

Application : soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle. Supposons que $Q(x) \neq 0$ pour $x \geqslant a$. Alors $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge lorsque

$$\deg(Q) - \deg(P) \geqslant 2$$

et diverge sinon.

Exemple :

$$\int_0^\infty \frac{x(1+\cos^2 x)}{1+x^2}\,dx > \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

et $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$ diverge car

$$\deg(1+x^2) - \deg(x) = 1 \ngeqslant 2.$$

Fonctions exponentielles

Pour $q > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_a^\infty e^{-qx}\,dx = -\frac{1}{q}\,e^{-qx}\Big|_a^\infty = \frac{1}{q}\,e^{-aq}$$

Corollaire 5.29. *Pour tout $p, q > 0$ et tout $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^\infty x^p e^{-qx}\,dx$ converge.*

Démonstration : En effet, on a

$$\frac{x^p}{e^{q/2x}} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

ce qui implique, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$x^p < e^{q/2x} \qquad \forall x \geqslant N.$$

Donc $x^p e^{-qx} < e^{-q/2x}$. Le critère de comparaison implique la convergence de l'intégrale considérée. $\square$

5.4 Application : calcul d'aires

5.4.1 Aire entre 2 courbes

Nous avons vu que l'aire du domaine limité par Ox et $y = f(x)$ entre a et x est donné par

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad A'(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dA}{dx} = f(x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{dA = f(x)dx = ydx.} \qquad\qquad (*)$$

dA est l'élément différentiel d'aire et on a

$$A = \int dA.$$

Si $f(x) \geqslant g(x)$ sur le domaine considéré, alors l'aire du domaine limité par $y = f(x)$ et $y = g(x)$ entre a et b est donné par

$$\int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\,dx.$$

ATTENTION : si le graphe de f coupe celui de g, il faut faire attention au signe.

Dans certains cas, il est plus simple d'intégrer en fonction de la variable y, les bords du domaine étant alors des fonctions de y. On a la formule symétrique :

$$\boxed{dA = x(y)\,dy.}$$

Exemple : calculons l'aire du domaine compris entre la droite $x + y = 0$ et la parabole $y^2 = 2y - x$.

• On calcule d'abord les points d'intersection : $O(0; 0)$ et $I(-3; 3)$.
• On exprime les bords comme des fonctions de la variable y :
droite : $x = -y = g_1(y)$
parabole : $x = 2y - y^2 = g_2(y)$.
Alors

$$dA = [g_2(y) - g_1(y)] = \left[(2y - y^2) - (-y)\right]\ dy = \left(3y - y^2\right)\ dy$$

et l'aire est donc

$$A = \int dA = \int_{y=0}^{y=3} 3y - y^2\ dy = \left[\frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^3 = \frac{9}{2}.$$

Représentation paramétrique

Supposons qu'une courbe soit donnée sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Alors $\dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt} \implies dx = \dot{x}(t)\,dt$. La formule (*) devient

$$\boxed{dA = y\,dx = y(t)\dot{x}(t)\,dt}$$

et l'aire entre $t = t_P$ et $t = t_Q$ vaut alors

$$\boxed{A = \int_{t_P}^{t_Q} y(t)\dot{x}(t)\,dt.}$$

Exemple : la cycloïde

La trajectoire d'un point d'un cercle roulant sur une droite est donnée par la **cycloïde** :

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

Calculons l'aire d'un arc de cycloïde.

On a $\dot{x}(t) = R(1 - \cos t)$. Alors

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} y(t)\dot{x}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} R(1-\cos t)R(1-\cos t)\,dt \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)\,dt = R^2(2\pi - 0 + \pi) = 3\pi R^2
\end{aligned}
$$

Rappel :

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t + \sin^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} 1 \cdot\,dt = 2\pi$$

et donc par symétrie $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi$.

5.4.2 Domaine fermé

Soit D un domaine fermé dont la frontière est définie par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ pour $t \in [t_1; t_2]$.

On a $t_1 < t_D < t_G < t_2$.

$$
\begin{aligned}
A_D &= \int_{x_G}^{x_D} y^+ dx - \int_{x_G}^{x_D} y^- dx = \int_{t_G}^{t_D} y(t)\dot{x}(t)\,dt - \left(\int_{t_G}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_D} y(t)\dot{x}(t)\,dt\right) \\
&= -\int_{t_D}^{t_G} y\dot{x} - \int_{t_G}^{t_2} y\dot{x} - \int_{t_1}^{t_D} y\dot{x} \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}y\,dt
\end{aligned}
$$

En intégrant selon y, c'est-à-dire en prenant $dA = xdy$, on obtient

$$A_D = \int_{t_1}^{t_2} x\dot{y}\,dt.$$

En additionnant les 2 formules et en divisant par 2, on obtient

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \oint (x\dot{y} - \dot{x}y)\ dt.}$$

$$\oint = \text{intégrale curviligne} = \int_{t_1}^{t_2} \ldots\ dt$$

où $[t_1; t_2]$ parcourt le bord de D dans le **sens trigo** une et une seule fois.

Exemple : Aire de la boucle de la courbe $\Gamma : y^3 - xy^2 + x^4 = 0$

Paramétrisation : si l'on pose $y = tx$, on obtient $t^3x^3 - t^2x^3 + x^4 = 0$ ce qui donne $x^3\left[(t^3 - t^2) + x\right] = 0$ et donc

$$\begin{cases} x = t^2 - t^3 \\ y = t^3 - t^4 \end{cases}$$

$t = 0 \longrightarrow (0; 0)$
$t = 1 \longrightarrow (0; 0)$
Et pour $0 < t < 1$, on a $x > 0$ et $y > 0$. Donc si t parcourt l'intervalle $[0; 1]$, on parcourt le bord de D **une et une seule fois**. Alors

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x\dot{y} - \dot{x}y)\ dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (t^2 - t^3)(3t^2 - 4t^3) - (2t - 3t^2)(t^3 - t^4)\, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^4(1 - t)^2\, dt = \cdots = \frac{1}{210}. \end{aligned}$$

5.4.3 Surfaces sectorielles

Domaines limités par un arc PQ et par les segments OP et OQ. Alors

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \int_{t_P}^{t_Q} (x\dot{y} - \dot{x}y)\ dt}$$

Démonstration :
Paramétrisation de OP :

$$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = mt \end{array}\right. \quad (\text{pente} = m) \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = m \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad x\dot{y} - \dot{x}y = mt - mt = 0$$

Idem pour QO : $x\dot{y} - \dot{x}y = 0$.

Donc

$$\oint (x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt = \int_{OP} \dots \quad + \int_{PQ} \dots \quad + \int_{QO} \dots \quad = 0 + \int_P^Q \dots + 0 = \int_P^Q x\dot{y} - \dot{x}y.$$

Exemple : secteur d'une ellipse d'équation :

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{array}\right.$$

Alors

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_P}^{t_Q} (a\cos t \cdot b\cos t + a\sin t \cdot b\sin t)\, dt = \frac{1}{2}ab \cdot (t_Q - t_P).$$

Si $t = 0$ et $t = 2\pi$, on obtient l'aire de l'ellipse :

$$\boxed{A_{\text{ellipse}} = \pi ab.}$$

Coordonnées polaires

Si l'arc PQ est donnée en coordonnées polaires $\rho = \rho(\varphi)$, alors

$$x = \rho\cos\varphi \qquad \text{et} \qquad y = \rho\sin\varphi$$

donne

$$\dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi \qquad \text{et} \qquad \dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi.$$

L'aire est égale alors à

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_P^Q (x\dot{y} - \dot{x}y)\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_{\varphi_P}^{\varphi_Q} \rho\cos\varphi \cdot (\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi) - \rho\sin\varphi \cdot (\dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi)\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_{\varphi_P}^{\varphi_Q} \rho^2 \cdot (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_{\varphi_P}^{\varphi_Q} \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \end{aligned}$$

Explication intuitive :

L'aire du triangle infinitésimal est égale à

$$dA = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{hauteur} \approx \frac{1}{2} ds \cdot \rho = \frac{1}{2} \rho \cdot d\varphi \cdot \rho = \frac{1}{2} \rho^2 d\varphi.$$

Exemple : Aire du domaine hachuré de la spirale hyperbolique : $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$.

$$A = \frac{1}{2} \left(\int_{\pi/4}^{\pi} \frac{a^2}{\varphi^2} d\varphi - \int_{9\pi/4}^{3\pi} \frac{a^2}{\varphi^2} d\varphi \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{a^2}{\varphi} \bigg|_{\pi/4}^{\pi} + \dots \right) = \frac{13}{9\pi} a^2.$$

5.4.4 Longueur d'arc

Soit $\Gamma : y = f(x)$ une courbe avec f dérivable. On note s la longueur d'arc de Γ entre le point P et le point Q. On approxime l'arc PQ par une suite de cordes $P_k P_{k+1}$.

Longueur de la corde $P_k P_{k+1}$:

$$|P_k P_{k+1}| = \Delta l_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

Si l'on divise l'arc en n cordes alors on a

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \Delta l_k = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \right)^2} \cdot \Delta x_k \qquad (*)$$

Lorsque $n \longrightarrow \infty$ et $\Delta x_k, \Delta y_k \longrightarrow 0$ alors $\dfrac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = y'$ et la série (*) a comme limite

$$\boxed{s = \int_{x_P}^{x_Q} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \int_{x_P}^{x_Q} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}$$

De $s(x) = \displaystyle\int_a^x \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ on en déduit $s'(x) = \dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ et donc

$$\boxed{ds = s'(x) \cdot dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}} \qquad (**)$$

ds = élément différentiel de longueur d'arc.

Si la courbe est sous **forme paramétrique :**

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} dx = \dot{x}(t)\, dt \\ dy = \dot{y}(t)\, dt \end{cases}$$

la formule (**) devient $\boxed{ds = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt}$ et ainsi

$$\boxed{s = \int_{t_P}^{t_Q} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt}$$

Exemple 5.30.
Longueur d'une ellipse :

$$\Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $0 < a < b$.

Paramétrisation : $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = -a\sin t \\ \dot{y} = b\cos t \end{cases}$

Alors la longueur vaut :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\; dt = b\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 \sin^2 t + \cos^2 t}\; dt \\ &= b\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\; dt \end{aligned}$$

où $k^2 = 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2$.
Cette intégrale n'est pas élémentaire : on ne peut la calculer qu'avec des méthodes numériques.

Longueur en coordonnées polaires

Soit $\Gamma : \rho = \rho(\varphi)$ donnée en coordonnées polaires. Alors les équations

$$x = \rho \cos \varphi \qquad \text{et} \qquad y = \rho \sin \varphi$$

donnent, comme précédemment,

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \qquad \text{et} \qquad \dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \cos \varphi.$$

L'élément différentiel de longueur vaut alors

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, d\varphi = \cdots = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot{\rho}^2(\varphi)}\, d\varphi$$

et la longueur entre les points P et Q vaut

$$\boxed{s = \int_{\varphi_P}^{\varphi_Q} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot{\rho}^2(\varphi)}\, d\varphi.}$$

Exemple : Longueur de la cardioïde : $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ avec $a > 0$.

$$L = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi}\; d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \underbrace{\sqrt{2 + 2\cos\varphi}}_{=4\cos^2 \frac{\varphi}{2}}\; d\varphi$$

$$= 2a \int_0^{\pi} |2 \cos \frac{\varphi}{2}|\, d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

5.5 Calcul des volumes

5.5.1 Cas où l'aire des sections est connue

On suppose que l'aire A de la section de ce corps par chaque plan horizontaux est connue ; elle est alors fonction de z : $A = A(z)$.

Le volume du domaine du corps limité par 2 plans très proches $z = z_k$ et $z = z_k + \Delta z_k$ est approximativement égale au volume du cylindre de base $A(z_k)$ et de hauteur Δz_k. Ainsi

$$\Delta V_k = A(z_k) \cdot \Delta z_k$$

En partageant ainsi la hauteur du corps en n intervalles, on obtient :

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} A(z_k) \cdot \Delta z_k.$$

C'est une somme de Riemann et l'on peut faire tendre n vers l'infini. Si la limite existe, on obtient

$$\boxed{V = \lim_{n\to\infty} V_n = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} A(z)\, dz.}$$

Exemples 5.31.
(1) Volume d'un cône de base quelconque B et de hauteur h.

Comme B et $B(z)$ sont homothétiques, on a pour tout $z \in [0; h]$:

$$\frac{B(z)}{B} = \left(\frac{z}{h}\right)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad B(z) = \frac{B}{h^2} z^2 \,.$$

Donc

$$V = \int_0^h B(z)\, dz = \int_0^h \frac{B}{h^2} z^2\, dz = \frac{B}{h^2} \cdot \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^h = \frac{1}{3} B \cdot h \,.$$

(2) Volume de l'ellipsoïde : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

Dans chaque plan, $z = z_0$, la section est une ellipse d'équation :

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z_0^2}{c^2} = \delta_0^2 \\ \Longrightarrow \qquad & \frac{x^2}{(a\delta_0)^2} + \frac{y^2}{(b\delta_0)^2} = 1 \end{aligned}$$

L'aire de chaque ellipse vaut

$$A_0 = \pi(a\delta_0)(b\delta_0) = \pi ab\delta_0^2 = \pi ab \cdot \left(1 - \frac{z_0^2}{c^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad A(z) = \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \,.$$

On obtient pour le volume :

$$V = \int_{-c}^{c} \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = 2\pi ab \int_{0}^{c} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = 2\pi ab \left(z - \frac{z^2}{3c^2}\right)\Big|_0^c = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Si $a = b = c = R$, l'ellipsoïde est une sphère de volume $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

5.5.2 Corps de révolution

Considérons une courbe $\Gamma : y = f(x)$

On peut générer un volume en faisant tourner

- le domaine D autour de l'axe Ox : alors

$$\boxed{dV = \pi y^2\, dx}$$

  et donc

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\, dx.$$

- le domaine D' autour de l'axe Oy :

$$\boxed{dV = \pi x^2 dy}$$

  ce qui donne

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} [g(y)]^2\, dy$$

  ou également

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} x^2 \underbrace{f'(x)dx}_{=dy}$$

  car $dy = f'(x)\, dx$.

Si le domaine est limité par deux courbes f et g (voir dessin), alors

$$V = \pi \int f^2(x) - g^2(x)\, dx.$$

Exemple 5.32. $y = f(x) = 2x^3$ entre $O(0;0)$ et $P(1;2)$.

Rotation autour de l'axe Ox du domaine D : $V = \pi \int_0^1 4x^6\,dx = \frac{4}{7}\pi$.

Rotations autour de l'axe Oy du domaine D : $x = f^{-1}(y) = g(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{1/3}$ et $h(y) = 1$. Alors

$$V = \pi \int_{y=0}^{y=2} h(y)^2 - g(y)^2\,dy = \pi \int_0^2 1 - \left(\frac{y}{2}\right)^{2/3} dy = \pi \left(y - \frac{1}{2^{2/3}} \cdot \frac{3}{5} y^{5/3} \right)\Bigg|_0^2 = \pi(2 - \frac{6}{5}) = \frac{4\pi}{5}.$$

Courbes paramétriques

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\boxed{dV = \pi y^2(t)\dot{x}(t)\,dt} \qquad \text{(rotation autour de l'axe } Ox\text{)}$$

$$\boxed{dV = \pi x^2(t)\dot{y}(t)\,dt} \qquad \text{(rotation autour de l'axe } Oy\text{)}$$

Si pour $t \in [t_1; t_2]$, le domaine limité par Γ est **fermé** et **entièrement situé d'un côté de l'axe**, alors le volume du corps de révolution est

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\dot{x}(t)\,dt.$$

Exemple : Volume du tore :

$$\begin{cases} x = R + r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \qquad t \in [0; 2\pi]$$

Alors (axe de rotation = axe Oy)

$$V = \pi \int x^2 \dot{y}\,dt = \pi \int_0^{2\pi} (R + r\cos t)^2 \cdot r\cos t\,dt = \pi r \int_0^{2\pi} (R^2\cos t + 2Rr\cos^2 t + r^2\cos^3 t)\,dt$$
$$= \pi r(0 + 2Rr \cdot \pi + 0) = 2\pi^2 R r^2.$$

5.6 Surface de révolution

Rotation autour de l'axe Ox

On considère à nouveau une courbe $\Gamma : y = f(x)$ que l'on fait tourner autour de l'axe Ox.

On engendre ainsi une **surface de révolution** dont on veut déterminer l'aire.

Pour ce faire, on divise Γ en n cordes $P_{k-1}P_k$. Chaque segment $P_{k-1}P_k$ engendre, en tournant, une surface qui est égale à

$$\Delta s_k = 2\pi \cdot \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} \cdot l_k$$

où l_k est la longueur de la corde $P_{k-1}P_k$. Or, on a montré que $l_k = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k$.
Donc

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \cdot \Delta x_k.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient, si la limite existe

$$\boxed{S = 2\pi \int_{x_P}^{x_Q} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.}$$

L'<u>élément différentiel de surface</u> est

$$\boxed{dS = 2\pi y\, ds = 2\pi y \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}$$

où ds = élément différentiel de longueur = $\sqrt{dx^2 + dy^2}\, dx$.

Rotation autour de l'axe Oy

Par analogie, la rotation autour de l'axe Oy donnera la surface

$$S = 2\pi \int_{x_P}^{x_Q} x\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Ici, on a $\boxed{dS = 2\pi x\, ds}$

Exemples 5.33.

1) Miroir parabolique : soit $y = x^2$ un arc de parabole avec $0 \leqslant x \leqslant 1$.
La rotation autour de Oy donne un miroir parabolique.

Sa surface vaut

$$S = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\frac{2}{3}\,(1+4x^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

2) Surface d'une sphère. On a $\Gamma : \begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned} S = 2\cdot \int dS &= 2\cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} x\sqrt{\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{y}(\varphi)^2}\,d\varphi \\ &= 4\pi \int_0^{\pi/2} R\cos\varphi \cdot R\,d\varphi = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

5.7 Convergence des séries : critère intégral

Considérons la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Posons $f(n) = u_n$ et prolongeons la fonction discrète $f(n)$ aux valeurs réelles $x > 1$.

La condition nécessaire de convergence de la série est que $u_n \longrightarrow 0$ ce qui implique que $f(x) \longrightarrow 0$.

Om impose de plus que $f(x)$ soit décroissante.
Alors la somme partielle

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

est la somme des aires des rectangles de base 1 et de hauteur $f(n)$. Comme $f(x)$ décroît, on a

$$u_n > \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

et donc

$$s_n > \int_1^2 f(x)\,dx + \cdots + \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{n+1} f(x)\,dx.$$

De même,

$$u_{n+1} = f(n+1)\cdot 1 < \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

d'où

$$s_{n+1} < u_1 + \int_1^2 + \cdots + \int_n^{n+1} = u_1 + \int_1^{n+1} f(x)\,dx.$$

Si l'on fait tendre n vers l'infini, on obtient le critère suivant :

- si $I = \displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ diverge, alors $s_n > \displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$: la série diverge
- si $I = \displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = s < u_1 + I$: la série converge

Applications

Les séries $\displaystyle\sum \frac{1}{n^r}$ $(r > 0)$ converge si $r > 1$ et diverge sinon.

Exemples :

1) Que peut-on dire de $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$?

Posons

$$f(x) = \frac{1}{x\ln x}.$$

- On a bien $f(x)$ décroissante car $f' = \dfrac{-1}{(x\ln x)^2}(\ln x + 1) < 0$ si $x \geqslant 2$.
- $\displaystyle\int_2^\infty f(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx = \Big[\ln|\ln x|\Big]_2^\infty = +\infty.$

On en déduit que la série diverge.

2) Prenons $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$.

Alors $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ est décroissante et

$$\int_2^\infty f(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{1}{x}(\ln x)^{-2}\,dx = -(\ln x)^{-1}\Big|_2^\infty = \frac{1}{\ln 2} - \lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{\ln\xi} = \frac{1}{\ln 2}.$$

On en déduit que la série converge.

Chapitre 6

Equations différentielles ordinaires

6.1 Introduction et définitions

Cherchons toutes les fonctions $y = f(x)$ satisfaisant l'équation fonctionnelle

$$f'(x) + f(x) = 0 \qquad\qquad (*)$$

En essayant, on trouve que $f(x) = e^{-x}$ satisfait l'équation $(*)$.
Y a-t-il d'autres solutions ?
Par linéarité, $f(x) = Ce^{-x}$ est aussi une solution pour tout $C \in \mathbb{R}$. On verra plus tard que toute solution de $(*)$ est de la forme Ce^{-x}.

L'équation $(*)$ est une **équation différentielle du 1er ordre** = équation reliant une fonction inconnue $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$.

Définition 6.1. Plus généralement, une équation différentielle d'ordre n est une équation

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

faisant intervenir une **variable** x, une **fonction inconnue** $y = y(x)$ et ses dérivées $y'(x)$, $y''(x)$, $\ldots y^{(n)}(x)$ jusqu'à l'ordre n.

Exemples 6.2.
1. Circuit électrique RLC série :

Notons $q(t)$ la charge sur la capacité. Alors le courant est la dérivée de la charge : $I(t) = \dot{q}(t)$.

- résistance R : $U_R = RI(t) = R\dot{q}(t)$

- inductance L : $U_L = L \cdot \dfrac{dI(t)}{dt} = L\ddot{q}(t)$
- capacité C : $q = CU_C$
- $U = U(t)$: tension de la source.

Alors on doit avoir $U_R + U_C + U_L = U(t)$ ce qui donne

$$R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) + L\ddot{q}(t) = U(t).$$

C'est une équation différentielle d'ordre 2.

2. En mécanique newtonnienne on a l'équation $F = ma$.
   Soit t le temps, $y(t)$ la position, $\dot{y}(t)$ la vitesse et $\ddot{y}(t)$ l'accélération. Si on suppose que la force dépend du temps, de la position et de la vitesse $F = F(t, y, \dot{y})$, on doit résoudre l'équation différentielle du 2ème ordre :

$$m\ddot{y} = F(t, y, \dot{y})$$

Remarque 6.3 (Conditions initiales)**.** Pour résoudre une équation différentielle, on fait une intégration : la **solution générale** contient donc une (ou plusieurs) constante(s) C_1, C_2, $\ldots C_n$.
Souvent, à l'équation différentielle $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ s'ajoute une **condition initiale**

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = v_0, \;\; \ldots, \;\; y^{(n-1)}(x_0) = b_0.$$

Cette condition initiale impose la valeur des constantes C_i : on parle de **solution particulière**.

6.2 Equation différentielle du premier ordre

Forme générale : $\Phi(x, y, y') = 0$.

Sous des hypothèses très larges, on peut écrire

$$\boxed{y' = \phi(x, y)}$$

C'est la **forme normale**.

6.2.1 Equation séparable

Si

$$y' = \phi(x, y) = f(x)g(y)$$

on dit que l'équation différentielle est **séparable**. On a alors

$$\frac{1}{g(y)} \cdot y' = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{g(y)}\, dy = f(x)\, dx$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx}$$

Le problème se ramène à 2 intégrations.

Exemples 6.4.

1. $xy' - 2y = 0$

$$\Longrightarrow \quad y' = \frac{2y}{x} = \frac{1}{x} \cdot 2y \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y}\,dy = \frac{2}{x}\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,dy = 2\int \frac{1}{x}\,dx \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = 2\ln|x| + c \quad \Longrightarrow \quad |y| = x^2 \cdot e^c$$

$$\Longrightarrow \quad y = C \cdot x^2 \qquad C \in \mathbb{R} \qquad \text{(solution générale)}$$

Si de plus on veut $y(1) = 2$, alors $y(x) = 2x^2$.

2. $y' = (1 + 2x)\sqrt{1 + y^2}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = (1 + 2x)\sqrt{1 + y^2} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}\,dy = \int (1 + 2x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad \text{arcsinh}\,(y) = x + x^2 + C$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = \sinh(x + x^2 + C) \qquad \text{solution générale}$$

Si l'on veut par exemple $y(0) = 0$ alors $y(x) = \sinh(x + x^2)$.

Equation autonome

Un cas particulier d'équation séparable est celui des équations dites **autonomes** :

$$y' = g(y).$$

L'équation est <u>indépendante de x</u> . On a alors

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{g(y)}\,dy = dx\,.$$

Après intégration on obtient

$$\boxed{\int \frac{1}{g(y)}\,dy = x + C} \qquad (*)$$

Exemple : résoudre $y' = y^2 + y$. Alors $\frac{dy}{y^2+y} = dx$. Or

$$\int \frac{1}{y^2 + y}\,dy = \int \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\,dy = \ln|y| - \ln|1 + y| = \ln\left|\frac{y}{y+1}\right|$$

L'équation $(*)$ devient $\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = x + c$ ce qui donne

$$\frac{y}{y+1} = \pm e^c e^x = Ce^x \qquad C \in \mathbb{R}$$

Cette équation implicite se résoud pour donner

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{C}e^{-x} - 1} = \frac{C}{e^{-x} - C}$$

6.2.2 Equation homogène en x et y

Définition 6.5. On dit que $\phi(x,y)$ est **homogène de degré** 0 en x et y si

$$\phi(tx,ty)=\phi(x,y) \qquad \text{pour tout } t\in\mathbb{R}.$$

Exemples 6.6.

1. $\phi(x,y)=\dfrac{x^3+xy^2}{y^3+x^2y}$ est homogène de degré 0 ($\frac{\text{degré 3}}{\text{degré 3}}$) car

$$\phi(tx,ty)=\frac{t^3x^3+txt^2y^2}{t^3y^3+t^2x^2ty}=\frac{x^3+xy^2}{y^3+x^2y}=\phi(x,y).$$

2. $\phi(x,y)=xy$ n'est pas homogène de degré 0 car $\phi(tx,ty)=t^2xy\neq\phi(x,y)$
3. $\phi(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$ n'est pas homogène car $\phi(2x,2y)=\dfrac{2x+2y}{4xy}=\dfrac{1}{2}\dfrac{x+y}{xy}\neq\phi(x,y)$.

Résolution : On effectue le changement de fonction $\boxed{y(x)=u(x)\cdot x}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{y'=xu'+u}$$

et ceci nous ramène à une équation séparable en x et $u(x)$.

Exemple : $y'=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ homogène de degré 0.

En posant $y=ux$ et donc $y'=u'x+u$, on obtient

$$\begin{aligned}
u'x+u=\frac{x^2u}{x^2+u^2x^2}=\frac{u}{1+u^2} \quad &\Longrightarrow \quad u'=\frac{1}{x}\cdot\left[\frac{u}{1+u^2}-u\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\left[-\frac{u^3}{1+u^2}\right]\\
&\Longrightarrow \quad -\frac{1+u^2}{u^3}\,du=\frac{1}{x}\,dx \quad \Longrightarrow \quad \int -\frac{1+u^2}{u^3}\,du=\int\frac{1}{x}\,dx\\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|x|+c.
\end{aligned}$$

Comme $u=\dfrac{y}{x}$, on trouve

$$\frac{x^2}{2y^2}=\ln|x|+\ln|y/x|+c=\ln|y|+c \quad \Longrightarrow \quad e^{x^2/2y^2}=|y|\cdot\underbrace{e^c}_{=C}.$$

On obtient finalement

$$Cy=e^{x^2/2y^2}$$

C'est une forme implicite impossible à résoudre sous la forme $y=f(x)$.

6.2.3 Equation linéaire

Une **équation différentielle du premier ordre linéaire** est (sous forme normale) :

$$\boxed{y' + a(x)y = b(x)}$$

ATTENTION : elle est linéaire en y et y' ; pas en x.

• Le terme $b(x)$ est appelé le **second membre**.
• Si $b(x) = 0$, l'équation est dite **homogène**. Sinon elle est **inhomogène** ou **avec second membre**.

Exemples 6.7.

– $y' + \dfrac{\cos x}{x}\, y = 2x^2$ est linéaire inhomogène avec $a(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ et $b(x) = 2x^2$
– $y' \cdot y + xy = 2x - 1$ n'est **pas linéaire**
– $e^x y' + 4x^3 y = 0$ est linéaire homogène : $y' + \underbrace{\dfrac{4x^3}{e^x}}_{=a(x)} y = 0$

Pour résoudre une équation linéaire, on procède en 2 étapes :
(I) d'abord on résoud l'équation homogène (en posant $b(x) = 0$) ;
(II) puis on résoud l'équation avec second membre.

(I) Equation homogène

Soit $y'(x) + a(x)y = 0$.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -a(x)y \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y}dy = -a(x)dx \\
&\Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\, dy = \ln|y| = \int -a(x)\, dx = -A(x) + c
\end{aligned}$$

où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$. Ceci donne finalement

Solution générale de l'équation homogène : $\boxed{y_h(x) = C \cdot e^{-A(x)}}$ $\quad C \in \mathbb{R}$

On note $w(x) = e^{-A(x)}$.

Exemple 6.8. $y' + x^2 y = 0$.
On a $a(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad A(x) = x^3/3$ ce qui donne

$$y = Ce^{-x^3/3}$$

(II) Equation inhomogène (avec second membre)

Théorème 6.9 (Théorème 1)**.** *La solution générale de l'équation inhomogène*

$$y' + a(x)y = b(x)$$

s'écrit comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de la solution inhomogène.

DÉM : Soit $w(x)$ une solution de l'équation homogène et $y_P(x)$ une solution particulière de la solution inhomogène. Alors

$$[w(x) + y_P(x)]' + a(x)\,[w(x) + y_P(x)] = \underbrace{w'(x) + a(x)w(x)}_{=0} + \underbrace{y_P'(x) + a(x)y_P(x)}_{=b(x)} = b(x)$$

ce qui montre que $w(x) + y_P(x)$ est une solution de l'équation inhomogène.

Réciproquement, soit $z_1(x)$ et $z_2(x)$ deux solutions de l'équation inhomogène. Alors

$$\begin{aligned}[z_1(x) - z_2(x)]' + a(x)\,[z_1(x) - z_2(x)] &= z_1'(x) + a(x)z_1(x) - [z_2'(x) + a(x)z_2(x)] \\ &= b(x) - b(x) = 0\end{aligned}$$

ce qui montre que $w(x) = z_1(x) - z_2(x)$ est solution de l'équation homogène et donc que $z_1(x) = w(x) + z_2(x)$. □

Résolution de l'équation avec second membre : Il reste à trouver une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$. Pour cela on utilise la

A : Méthode des essais

On essaie une solution de la forme

$$y_P(x) = K_1 f_1(x) + K_2 f_2(x) + \cdots + K_n f_n(x)$$

où les f_i sont choisies relativement à la forme du second membre $b(x)$.

Exemples 6.10.

1. $$y' + y = e^x + \sin x \qquad (1)$$

   On essaie $y_P(x) = K_1 e^x + K_2 \sin x + K_3 \cos x$ que l'on introduit dans (1). On obtient

   $$K_1 e^x + K_2 \cos x - K_3 \sin x + K_1 e^x + K_2 \sin x + K_3 \cos x = e^x + \sin x$$

   ce qui donne $K_1 = \frac{1}{2}$ et le système

   $$\begin{cases} K_2 + K_3 = 0 \\ K_2 - K_3 = 1 \end{cases}$$

   dont la solution est $K_2 = \frac{1}{2}$ et $K_3 = -\frac{1}{2}$.
   Une solution particulière est donc

   $$y_P(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + \sin x - \cos x\right).$$

2. $y' + 2y = 2e^{-2x} \qquad (2)$
   On essaie $y_P(x) = Ke^{-2x}$. Introduit dans (2), ceci donne
   $$-2Ke^{-2x} + 2Ke^{-2x} = 2e^{-2x}$$
   qui est impossible. Le choix est mauvais.

3. $2xy' + y = x^2 - x$.
   On essaie $y_P(x) = K_1x^2 + K_2x$. Ceci donne
   $$2x \cdot (2K_1x + K_2) + K_1x^2 + K_2x = x^2 - x$$
   et donc $5K_1 = 1$ et $3K_2 = -1$. Une solution particulière est donc
   $$y_P(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{3}x.$$

Si la méthode des essais ne marche pas, on applique la méthode générale :

B : Méthode de la variation des constantes

On cherche une solution particulière en posant

$$y_P(x) = c(x)w(x)$$

où $w(x) = e^{-A(x)}$ est la solution de l'équation homogène et $c(x)$ une fonction à trouver. En introduisant y_P et y_P' dans l'équation $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ on obtient

$$c'(x)w(x) + c(x)w'(x) + a(x)c(x)w(x) = b(x)$$

ce qui devient, en utilisant le fait que $w'(x) + a(x)w(x) = 0$,

$$c'(x)w(x) = b(x)$$

Finalement

$$c'(x) = \frac{b(x)}{w(x)}$$

ce qui montre que $c(x)$ est une primitive de $b(x)e^{A(x)}$.

En résumé, une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ est donnée par

$$\boxed{y_P(x) = c(x)e^{-A(x)}}$$

avec $\boxed{c(x) = \int \frac{b(x)}{w(x)}\, dx = \int b(x)e^{A(x)}\, dx.}$

Exemples 6.11.

1. Résoudre l'équation
$$y' + \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{=a(x)}\, y = \underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^2}}_{=b(x)}\,.$$

$$a(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad A(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

(I) Equation homogène :
$$w(x) = e^{-A(x)} = e^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

La solution générale de l'équation homogène est donc
$$y_h(x) = Cw(x) = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(II) Equation avec second membre :
$$c(x) = \int \frac{b(x)}{w(x)}\, dx = \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\sqrt{1+x^2}\, dx = \int \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et alors une solution particulière de l'équation inhomogène est donnée par
$$y_P(x) = c(x)w(x) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

La solution générale est alors
$$y(x) = Cw(x) + y_P(x) = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall C \in \mathbb{R}.$$

2. Résoudre
$$y' + y = \underbrace{e^x + \sin x}_{=b(x)}\,.$$

(I) Equation homogène : $y' + y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad w(x) = e^{-x}$
(II) Equation inhomogène :
$$c(x) = \int \frac{b(x)}{w(x)}\, dx = \int e^x(e^x + \sin x)\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$$

et donc
$$y_P(x) = w(x)c(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$$

Finalement, la solution générale est
$$y(x) = Cw(x) + y_P(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x).$$

3. Résoudre
$$xy' - 2y = x^2 - x\,.$$

Forme normale :
$$y' - \frac{2}{x}y = x - 1$$

avec $a(x) = -\frac{2}{x}$ et $b(x) = x - 1$.

(I) Equation homogène : $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$.

$$A(x) = \int a(x)\,dx = -2\ln|x| \qquad \Longrightarrow \qquad w(x) = e^{-A(x)} = e^{2\ln|x|} = x^2$$

et la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = Cw(x) = Cx^2.$$

(II) Solution particulière de l'équation inhomogène :

$$c(x) = \int \frac{b(x)}{w(x)}\,dx = \int \frac{1}{x^2}(x-1)\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\,dx = \ln|x| + \frac{1}{x}$$

Une solution particulière est donc

$$y_P(x) = w(x)c(x) = x^2(\ln|x| + \frac{1}{x}) = x + x^2\ln|x|.$$

La solution générale est alors

$$y(x) = y_h(x) + y_P(x) = Cx^2 + x + x^2\ln|x| \qquad C \in \mathbb{R}$$

6.2.4 Equation du type $y' = \phi\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$

On se ramène à une équation homogène de degré 0 en posant

$$\begin{cases} x = \xi + \alpha & \text{nouvelle variable} \\ y = u + \beta & \text{nouvelle fonction} \implies y' = u' \end{cases}$$

où α et β satisfont le système : $\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ d\alpha + e\beta + f = 0 \end{cases}$

Exemple 6.12.

$$y' = \frac{2x+y+1}{4x+y}.$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha + \beta + 1 = 0 \\ 4\alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2},\ \beta = -2$$

On pose donc

$$\begin{cases} x = \xi + \frac{1}{2} \\ y = u - 2 \end{cases}$$

L'équation devient (avec $y' = u'$)

$$u' = \frac{2\xi + u}{4\xi + u} = \psi(\xi, u) \qquad (*)$$

C'est une équation homogène de degré 0 car $\psi(t\xi, tu) = \psi(\xi, u)$.
Résolution de $(*)$: on pose $u = \xi v \implies u' = v + \xi v'$. On obtient

$$v + \xi v' = \frac{2\xi + \xi v}{4\xi + \xi v} = \frac{2+v}{4+v}$$

C'est une équation séparable.

6.2.5 Equation de Bernoulli

$$\boxed{y' = f(x)y + g(x)y^n \qquad n \neq 1}$$

On divise l'équation par y^n pour obtenir

$$\frac{y'}{y^n} = f(x)\frac{y}{y^n} + g(x)$$

On pose

$$u(x) = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}\,.$$

Alors $u' = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y' = (1-n) \cdot \dfrac{y'}{y^n}$.
L'équation devient

$$\frac{1}{1-n}\,u' = f(x)u + g(x)$$

qui est une équation différentielle linéaire (en $u(x)$).

6.3 Equation différentielle du 2ème ordre

Forme générale :

$$\Phi(x, y, y', y'') = 0$$

Forme normale :

$$\boxed{y'' = \phi(x, y, y')}$$

6.3.1 Equation sans terme y

Si l'équation ne contient pas de y

$$y'' = \phi(x, y'), \qquad \text{on pose} \qquad u = y'$$

ce qui donne $u' = \phi(x, u)$. C'est une équation du premier ordre en $u(x)$.
Ayant trouvé $u(x)$ on intègre pour obtenir $y(x)$.

6.3.2 Equation autonome (sans terme x)

Si l'équation ne contient pas de x :

$$y'' = \phi(y, y'), \qquad \text{on pose} \qquad z(y) = y'$$

ce qui donne

$$y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}z(y) = \frac{d}{dy}z(y) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z = z(y)z'(y).$$

ATTENTION : ici $z'(y)$ signifie $\dfrac{dz}{dy}$ et pas $\dfrac{dz}{dx}$

Il suffit alors de résoudre l'équation du 1er ordre en y :

$$z(y) \cdot z'(y) = \phi(y,\ z(y)).$$

Puis, quand $z(y)$ est trouvé, on résoud encore l'équation différentielle $\dfrac{dy}{dx} = z(y)$.

Exemple : résoudre

$$yy'' = y'^2 + y'y^2.$$

Il n'y a pas de x.
On pose $y' = z(y) \quad \Longrightarrow \quad y'' = z \cdot z'$

$$\Longrightarrow y \cdot z \cdot z' = z^2 + zy^2 \qquad \Longrightarrow \qquad z'(y) - \frac{1}{y} z(y) = y$$

En divisant par z, il ne faut pas oublier la solution $z = 0$, i.e. $y' = 0$ donc $y = K$.
C'est une équation du premier ordre linéaire inhomogène, avec $a(y) = -\dfrac{1}{y}$ et $b(y) = y$.
On en déduit $A(y) = -\ln|y|$ et $w(y) = e^{-A(y)} = y$.
La solution générale est, après calculs,

$$z(y) = Cy + y^2.$$

On revient à x : $\quad z = \dfrac{dy}{dx} = Cy + y^2$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{dy}{Cy + y^2} = dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{C}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{C+y}\right) dy = dx.$$

Intégration :

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{C} \ln\left|\frac{y}{C+y}\right| = x + K \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y}{y+C} = e^{Cx+CK} = De^{Cx}$$

Ceci donne $y = D(y + C)e^{Cx}$ et finalement

$$y(x) = \frac{CDe^{Cx}}{1 - De^{Cx}} = \frac{CD}{e^{-Cx} - D} \qquad D, C \in \mathbb{R}.$$

Il faut rajouter à cette solution générale la solution $y = K$ trouvée plus haut.

6.3.3 Equation linéaire

Forme générale : $A_1(x)y'' + A_2(x)y' + A_3(x)y = B(x)$
Forme normale :

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = b(x)}$$

Comme pour le 1er ordre,

solution générale de l'équation inhomogène = solution générale de l'équation homogène + <u>une</u> solution particulière de l'équation inhomogène.

(cf. Théorème 1)

(I) Equation homogène

On considère l'équation

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{6.1}$$

Définition 6.13. Deux fonctions $y_1, y_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dont dites <u>linéairement indépendantes</u> si

$$[\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \quad \forall x \in I] \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0.$$

Théorème 6.14. *L'équation (6.1) possède deux solutions linéairement indépendantes $y_1(x)$, $y_2(x)$ et toute solution $y(x)$ de (6.1) est de la forme*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Il n'y a pas de méthode générale pour résoudre (6.1). Cependant, si on a trouvé une solution $y_1(x)$, on peut chercher la seconde en posant

$$\boxed{y_2 = u y_1}$$

où u satisfait une équation différentielle du 1er ordre.

Exemple 6.15. $\dfrac{x^2}{x+2} y'' - xy' + y = 0.$

On remarque que $y_1(x) = x$ est une solution.
Posons $y_2 = ux$. Alors $y_2' = u'x + u$ et $y_2'' = u''x + 2u'$. Dans l'équation, ceci donne

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \frac{x^2}{x+2}(u''x + 2u') - x(u'x + u) + ux = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^3}{x+2}u'' + (\frac{2x^2}{x+2} - x^2)u' = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{x^3}{x+2}u'' - \frac{x^3}{x+2}u' = 0 \quad \Longrightarrow \quad u'' - u' = 0 \quad \overset{v=u'}{\Longrightarrow} \quad v' - v = 0 \\
&\Longrightarrow \quad v = e^x \quad \Longrightarrow \quad u = e^x
\end{aligned}$$

et donc

$$y_2 = ux = xe^x.$$

La solution générale est donc, par le théorème 6.14,

$$y(x) = C_1 x + C_2 x e^x.$$

Un cas particulier est résoluble complètement : ce sont les

Equations à coefficients constants

Forme normale :

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0 \qquad p, q \in \mathbb{R} \qquad (**)}$$

On cherche une solution de la forme $y(x) = e^{\lambda x}$. En remplaçant dans l'équation, on trouve

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0$$

ce qui donne $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.
Le polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$$

est appelé le **polynôme caractéristique de l'équation** $(**)$.

1er cas : $P(\lambda)$ a deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2. Alors

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

est la solution générale.

2ème cas : $P(\lambda)$ a une racine réelle double $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.
Alors $y_1(x) = e^{\lambda x}$ est une solution et en posant $y_2 = uy_1$ on obtient $y_2(x) = xe^{\lambda x}$. La solution générale est alors

$$y(x) = C_1 \cdot e^{\lambda x} + C_2 \cdot xe^{\lambda x}.$$

3ème cas : $P(\lambda)$ a deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \mu + \omega_0 i \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \mu - \omega_0 i.$$

Alors

$$e^{(\mu \pm \omega_0 i)x} = e^{\mu x} \cdot e^{\pm \omega_0 i x} = e^{\mu x} \cdot \big[\cos(\omega_0 x) \pm i \sin(\omega_0 x)\big].$$

On en tire 2 solutions réelles linéairement indépendantes :

$$y(x) = e^{\mu x} \cdot \big[C_1 \cos(\omega_0 x) + C_2 \sin(\omega_0 x)\big]$$

est la solution générale.
ω_0 = **pulsation propre** de l'équation (du système).
Si $\mu < 0$, c'est le **facteur d'amortissement**.

(II) Equations linéaires inhomogènes

On sait, par le théorème 6.14, que la solution générale $y(x)$ de l'équation

$$y'' + p(x)y' + q(x) = b(x) \tag{6.2}$$

est de la forme

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_P(x)$$

où $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ est la solution générale de l'équation homogène et $y_P(x)$ une solution particulière de l'équation (6.2).
Il reste à trouver une solution particulière à l'équation (6.2).

A : Méthode des essais

On essaie une fonction de la forme

$$y_P(x) = \sum_k \alpha_k \cdot f_k(x)$$

où les f_k sont judicieusement choisies.

Exemple :

$$y'' + y = x^2 + \sin\frac{x}{2}\,.$$

Pour x^2 on pose : $f_1(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$ ce qui donne

$$2\alpha_1 + (\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3) = x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = -2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f_1(x) = x^2 - 2$$

Pour $\sin\frac{x}{2}$, on essaie $f_2(x) = \alpha \sin\frac{x}{2}$ ce qui donne

$$-\frac{\alpha}{4}\sin\frac{x}{2} + \alpha\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad f_2(x) = \frac{4}{3}\sin\frac{x}{2}.$$

Une solution particulière est donc

$$y_P(x) = x^2 - 2 + \frac{4}{3}\cdot\sin\frac{x}{2}$$

B : Méthode de Lagrange (ou variation des constantes)

Soit

$$w(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

la solution générale de l'équation homogène où y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

On cherche une solution de la forme

$$y_P(x) = \varphi_1(x) y_1(x) + \varphi_2(x) y_2(x)$$

où $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont des fonctions à déterminer.
On impose en plus

$$y_1\varphi_1' + y_2\varphi_2' = 0 \qquad (I)$$

ce qui donne

$$y_P' = \varphi_1 y_1' + \varphi_2 y_2' + \underbrace{\varphi_1' y_1 + \varphi_2' y_2}_{=0} = \varphi_1 y_1' + \varphi_2 y_2'$$

et

$$y_P'' = \varphi_1' y_1' + \varphi_2' y_2' + \varphi_1 y_1'' + \varphi_2 y_2''$$

En substituant y_P, y_P' et y_P'' dans l'équation (6.2), on obtient

$$\begin{aligned} &\varphi_1' y_1' + \varphi_2' y_2' + \varphi_1 y_1'' + \varphi_2 y_2'' + p\cdot\left(\varphi_1 y_1' + \varphi_2 y_2'\right) + q\cdot(\varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2) = b(x) \\ \Longleftrightarrow \quad &\varphi_1' y_1' + \varphi_2' y_2' + \varphi_1\cdot\left[y_1'' + p y_1' + q y_1\right] + \varphi_2\cdot\left[y_2'' + p y_2' + q y_2\right] = b(x) \qquad (***) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{cases} y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \\ y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 \end{cases}$$

car y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation homogène. Donc $(***)$ devient

$$\varphi_1'y_1' + \varphi_2'y_2' = b(x) \qquad (II)$$

Il faut donc résoudre le système linéaire (I) + (II) :

$$\begin{cases} y_1\varphi_1' + y_2\varphi_2' = 0 \\ y_1'\varphi_1' + y_2'\varphi_2' = b(x) \end{cases}$$

qui s'écrit matriciellement

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{=M} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Le déterminant $W = \det(M)$ s'appelle le **wronskien** de y_1 et y_2. Il est non nul car y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes. Alors

$$\begin{aligned} \boxed{\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix}} &= M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{W} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\frac{1}{W} \begin{pmatrix} -b(x)y_2 \\ b(x)y_1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

En intégrant ensuite φ_1' et φ_2', on obtient φ_1 et φ_2.

Exemples 6.16.

1. $y'' + y = \sin x$.
   On a $b(x) = \sin x$
   (I) Equation homogène (à coefficients constants) : $y'' + y = 0 \qquad \Longrightarrow$

   $$y_1(x) = \sin x \qquad \text{et} \qquad y_2(x) = \cos x.$$

   (II) Equation inhomogène :

   $$M = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}$$

   et donc $W = \det(M) = -1$. Alors

   $$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} -by_2 \\ by_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} by_2 \\ -by_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \cos x \\ -\sin^2(x) \end{pmatrix}$$

   Intégration :

   $$\Longrightarrow \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x).$$

Une solution particulière est donc

$$\begin{aligned} y_P(x) &= y_1\varphi_1 + y_2\varphi_2 \\ &= \sin x \cdot \frac{1}{2}\sin^2 x + \cos x \cdot (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)) \\ &= \cdots = -\frac{1}{2}x\cos x \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation $y'' + y = \sin x$ est alors

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_P = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{2}x\cos x\,.$$

2. Résoudre $$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 2xe^x$$

Forme normale : $y'' - \dfrac{2x+1}{x}y' + \dfrac{x+1}{x}y = 2e^x \qquad \Longrightarrow \qquad b(x) = 2e^x$

(I) Equation homogène : en essayant on trouve $y_1(x) = e^x$.
On pose alors $y_2 = uy_1 = ue^x$. Ceci donne

$$y_2' = u'e^x + ue^x \quad \text{et} \quad y_2'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x.$$

Introduits dans l'équation à résoudre, on obtient

$$\begin{aligned} &xe^x(u'' + 2u' + u) - (2x+1)e^x(u'+u) + (x+1)ue^x = 0 \\ \Longrightarrow \quad &u''x - u' = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = x^2 \quad \Longrightarrow \quad y_2(x) = x^2e^x. \end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} y_1 = e^x \\ y_2 = x^2e^x \end{cases}$

(II) Solution particulière de l'équation inhomogène :

$$M = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & x^2e^x \\ e^x & e^x(x^2+2x) \end{pmatrix}$$

et donc $W = \det(M) = e^{2x}(x^2 + 2x - x^2) = 2xe^{2x}$. Alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} &= \frac{1}{2xe^{2x}}\begin{pmatrix} -by_2 \\ by_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2xe^{2x}}\begin{pmatrix} -2e^x x^2 e^x \\ 2e^x e^x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui donne, après intégration : $\varphi_1 = -\frac{x^2}{2}$ et $\varphi_2 = \ln|x|$.
Une solution particulière est donc

$$y_P(x) = \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2 = \underbrace{-\frac{1}{2}x^2e^x}_{=-\frac{1}{2}y_2} + \ln|x|x^2e^x$$

La solution générale de l'équation étudiée est alors

$$y(x) = C_1y_1 + C_1y_2 + y_P = C_1e^x + C_2x^2e^x + x^2\ln|x|e^x \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

6.3.4 Equation de Ricati

$$\boxed{y' = g(x)y^2 + f(x)y + h(x)}$$

C'est une équation du 1er ordre (non linéaire). Après un changement de variable judicieux, on se ramène à une équation linéaire homogène du 2ème ordre.

On pose $y = -\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{u'}{u}$. On obtient

$$y' = \frac{g'(x)}{g^2(x)} \cdot \frac{u'}{u} - \frac{1}{g(x)} \cdot \left(\frac{u''u - u'^2}{u^2}\right)$$

L'équation devient alors

$$\begin{aligned} &\frac{g'(x)}{g^2(x)} \cdot \frac{u'}{u} - \frac{1}{g(x)} \cdot \left(\frac{u''u - u'^2}{u^2}\right) = \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{u'^2}{u^2} - \frac{f(x)}{g(x)}\frac{u'}{u} + h(x) \qquad \Big| \cdot g(x) \cdot u \\ &u'' - \left(\frac{g'(x)}{g(x)} + f(x)\right) \cdot u' + g(x)h(x) \cdot u = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation linéaire homogène du 2ème ordre.

6.3.5 Equation différentielle d'Euler

$$\boxed{x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0} \qquad \text{équation diff. linéaire homogène du 2ème ordre}$$

On essaie une solution de la forme $y = x^r$ (pour $x > 0$) .

Dans l'équation, ceci donne :

$$x^2 \cdot r(r-1)x^{r-2} + \alpha x \cdot rx^{r-1} + \beta x^r = 0.$$

On obtient alors $r(r-1)x^r + \alpha rx^r + \beta x^r = 0$ ou encore

$$\boxed{r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0.}$$

3 cas possibles :
<u>1er cas :</u> Deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2. Alors les 2 solutions linéairement indépendantes sont

$$y_1 = x^{r_1} \qquad y_2 = x^{r_2}$$

<u>2ème cas :</u> Une solution réelle double $r = r_1 = r_2$. Alors les 2 solutions linéairement indépendantes sont

$$y_1 = x^r \qquad y_2 = x^r \ln x$$

<u>3ème cas :</u> Deux solutions complexes conjuguées :

$$r_1 = a + bi \quad \text{et} \quad r_2 = a - bi.$$

Alors $x^{a\pm bi} = x^a x^{\pm bi} = x^a e^{\pm bi \ln x} = x^a\left(\cos(b\ln x) \pm i\sin(b\ln x)\right)$.
On en tire 2 solutions réelles linéairement indépendantes :

$$y_1 = x^a \sin(b\ln x) \qquad y_2 = x^a\cos(b\ln x)$$

Exemple 6.17.
1. $x^2y'' + xy' + y = 0 \quad (\alpha = 1 = \beta)$

$$\Longrightarrow \quad r^2+1=0 \quad \Longrightarrow \quad r=\pm i \quad \Longrightarrow \quad y_1(x)=\sin(\ln x) \quad \text{et} \quad y_2=\cos(\ln x)$$
$$\Longrightarrow \quad y(x) = C_1\sin\ln x + C_2\cos\ln x \qquad C_1, C_2\in\mathbb{R}.$$

2. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad (\alpha = -2,\ \beta = 2)$

$$\Longrightarrow \quad r^2-3r+2=0 \quad \Longrightarrow \quad r_1=1,\ r_2=2 \quad \Longrightarrow y_1(x)=x \quad y_2(x)=x^2$$
$$\Longrightarrow \quad y(x) = C_1x + C_2x^2 \qquad C_1, C_2\in\mathbb{R}.$$

6.4 Applications

6.4.1 Position d'équilibre d'un câble

Câble fixé en ses extrémités et soumis à son propre poids.

Forces agissant sur le bout MP :
- tension $\vec{T_0}$ en M et $\vec{T}$ en P.
- Poids : $\vec{G} = \vec{\mu}\cdot g\cdot s$ où

$\|\vec{\mu}\| = \mu =$ masse spécifique du câble,
$g =$ constante universelle de gravitation et
$s =$ longueur de l'arc PM.

Equilibre des forces :
1) composante verticale : $T\sin\alpha = \mu g s$
2) composante horizontale : $T\cos\alpha = T_0$.
On en tire

$$\tan\alpha = \frac{\mu g s}{T_0}\ .$$

Donc

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan\alpha = \underbrace{\frac{\mu g}{T_0}}_{=K}\, s = K\cdot\int_0^x \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx.$$

On doit résoudre l'équation

$$y' = K \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\, dx \qquad (*)$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = h = OM \end{cases}$$

En dérivant $(*)$, on trouve

$$y'' = K\sqrt{1+y'^2} \quad \overset{u=y'}{\Longrightarrow} \quad u' = K\sqrt{1+u^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = K dx$$

$$\overset{\int}{\Longrightarrow} \quad \text{arcsinh}\, u = Kx + C \quad \Longrightarrow \quad u = \sinh(Kx+C) = y'$$

$$\Longrightarrow \quad y' = \sinh(Kx) \quad \text{car } y'(0) = 0.$$

D'où finalement $y = \frac{1}{K}\cosh(Kx) + D$.
En utilisant la condition initiale $y(0) = h$, on obtient

$$y(x) = \frac{1}{K}\cosh(Kx) + h - \frac{1}{K}.$$

6.4.2 Phénomènes oscillatoires

Forces en présence :

- Force du ressort proportionnelle à l'élongation : $F_1 = -Ky(t)$
- Force de frottement proportionnelle à la vitesse : $F_2 = -\alpha y'(t)$.
- Force extérieure : $F_3 = \hat{F}(t)$.

Equation de Newton : $F_1 + F_2 + F_3 = ma$.
Ceci donne

$$my'' = -Ky - \alpha y' + \hat{F}(t) \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{y'' + ay' + ky = F(t)} \qquad (*)$$

avec $k = \dfrac{K}{m} > 0$, $a = \dfrac{\alpha}{m} > 0$ et $F(t) = \dfrac{\hat{F}(t)}{m}$.

Equation homogène (=sans force extérieure)

$y'' + ay' + ky = 0$: Equation de second ordre linéaire à termes constants :

Polynôme caractéristique : $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + k = 0$

1er cas :

$\Delta = a^2 - 4k > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad$ deux solutions réelles négatives :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4k}}{2} < 0$$

Alors

$$y_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Pas d'oscillation, amortissement exponentiel.

2ème cas :

$\Delta = a^2 - 4k = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad$ une solution réelle double négative :

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$$

Alors

$$y_h(t) = (C_1 + C_2 t) \cdot e^{-\frac{a}{2}\, t}$$

Pas d'oscillation, amortissement critique.

3ème cas :

$\Delta = a^2 - 4k < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad$ deux solutions complexes conjuguées :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \omega_0 i$$

avec $\omega_0 = \frac{\sqrt{4k-a^2}}{2}$ = pulsation propre
Facteur d'amortissement $= \dfrac{a}{2} = \dfrac{\alpha}{2m}$.

Alors

$$y_h(t) = [C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)] \cdot e^{-\frac{a}{2}t}$$

Oscillations et amortissement exponentiel.

Cas particulier : si $a = 0$ (pas de frottements) alors

$$y_h(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

Oscillations sans amortissement de pulsation propre

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{4k}}{2} = \sqrt{k} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Equation inhomogène : solution particulière

Il reste à chercher une solution particulière à l'équation $(*)$

$$y'' + ay' + ky = F(t).$$

On le fera uniquement dans le 3ème cas (oscillations) :

Méthode de Lagrange : On cherche une solution particulière de la forme

$$y_P(t) = e^{-\frac{a}{2}\,t}\left[\varphi_1(t)\cos(\omega_0 t) + \varphi_2(t)\sin(\omega_0 t)\right].$$

On obtient $M = e^{-\frac{a}{2}\,t}\begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}$ et le wronskien est alors

$$W = \det(M) = e^{-at} \cdot \omega_0.$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{W}\begin{pmatrix} -b(t)y_2 \\ b(t)y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega_0} \cdot e^{at}\begin{pmatrix} -F(t)\sin(\omega_0 t)e^{-\frac{a}{2}\,t} \\ F(t)\cos(\omega_0 t)e^{-\frac{a}{2}\,t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\omega_0} \cdot e^{\frac{a}{2}\,t}F(t)\begin{pmatrix} -\sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
y_P(t) &= e^{-\frac{a}{2}\,t}\left[\cos(\omega_0 t)\varphi_1(t) + \sin(\omega_0 t)\varphi_2(t)\right] \\
&= -e^{-\frac{a}{2}\,t}\frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0}\int_0^t F(x)e^{\frac{a}{2}\,x}\sin(\omega_0 x)\,dx + e^{-\frac{a}{2}\,t}\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\int_0^t F(x)e^{\frac{a}{2}\,x}\cos(\omega_0 x)\,dx \\
&= \frac{e^{-\frac{a}{2}\,t}}{\omega_0}\int_0^t F(x)e^{\frac{a}{2}\,x}\big[\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 x) - \cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 x)\big]\,dx \\
&= \frac{e^{-\frac{a}{2}\,t}}{\omega_0}\int_0^t F(x)e^{\frac{a}{2}\,x}\sin\big[\omega_0(t-x)\big]\,dx \qquad (**)
\end{aligned}$$

En général, $(**)$ est très difficile à calculer.

<u>Oscillations forcées</u> : On fait agir une force périodique sur la masse m :

$$F(t) = A\sin(\Omega t + \theta)$$

Alors $(**)$ reste compliquée à intégrer. On cherche une solution particulière directement pour l'équation différentielle

$$y'' + ay' + ky = A\sin(\Omega t + \theta)$$

en essayant une fonction de la forme :

$$y_P(t) = D_1\cos(\Omega t + \theta) + D_2\sin(\Omega t + \theta)$$

ce qui donne, après calculs :

$$y_P(t) = \frac{A}{\sqrt{(k-\Omega^2)^2 + a^2\Omega^2}}\sin(\Omega t + \theta + \beta) \qquad \text{avec} \quad \beta = \arctan\frac{\Omega a}{k - \Omega^2}$$

Dans ce cas particulier (3ème cas) , la solution générale est donc

$$y(t) = \underbrace{y_P(t)}_{\substack{\text{oscillations non amorties,}\\ \text{régime stationnaire}}} + \underbrace{\left[C_1\cos\omega_0\, t\ + C_2\sin\omega_0\, t\right]\cdot e^{-\frac{a}{2}t}}_{\substack{\text{oscillations avec amortissement,}\\ \text{régime transitoire}}}$$

Si $a \to 0$ (peu de frottement), alors l'amplitude des oscillation de $y_P(t)$ devient grande lorsque $\Omega^2 \approx k$.

A la limite, on a le phénomène de
<u>Résonance</u>
Lorsque $a = 0$ (pas de frottements), on obtient la solution générale

$$y(t) = \frac{A}{|k-\Omega^2|}\sin(\Omega t + \theta) + C_1\cos(\sqrt{k}\ t) + C_2\sin(\sqrt{k}\ t)$$

Si $\Omega = \omega_0 = \sqrt{k}$, la solution n'a pas de sens. Il faut reprendre l'équation différentielle qui devient

$$y'' + ky = A\sin(\sqrt{k}\,t + \theta) = A\Big[\cos\theta\cdot\sin(\sqrt{k}\,t) + \sin\theta\cdot\cos(\sqrt{k}\,t)\Big]$$

On essaie la solution particulière $\quad y_P(t) = t\cdot\Big[D_1\cos(\sqrt{k}\,t + \theta) + D_2\sin(\sqrt{k}\,t + \theta)\Big]$

Calculs $\Longrightarrow$

$$y_P(t) = -\frac{A}{2\sqrt{k}}\cdot t\cdot\cos(\sqrt{k}\,t + \theta).$$

Les amplitudes augmentent jusqu'à la rupture du matériau.

6.4.3 Circuit RLC série

Reprenons l'équation différentielle d'un circuit RLC :

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = U(t)\ .$$

C : capacité du condensateur
L : inductance
R : résistance

Forme normale :

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{U(t)}{L} \qquad (*)$$

On va résoudre le problème avec
• $U(t) = U_0$ pour $t \geqslant 0$ (on applique une <u>tension constante</u> à partir du temps $t = 0$).

On impose de plus les conditions initiales suivantes :
• $q(0) = 0$ (le condensateur est déchargé lors de l'enclenchement) et
• $\dot{q}(0) = 0$ (le courant est nul au temps $t = 0$).

(II) Solution particulière de l'équation avec second membre
Comme $U(t) = U_0 =$ cste, on vérifie que

$$q_P(t) = CU_0$$

est une solution particulière de $(*)$.

(I) Equation homogène :

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \frac{1}{LC}q(t) = 0$$

C'est la même équation que celle pour le ressort avec des constantes $\frac{R}{L}$ et $\frac{1}{LC}$ positives. Les 3 cas sont donc les mêmes :

Polynôme caractéristique :

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

d'où $\Delta = \dfrac{R^2}{L^2} - \dfrac{4}{LC} = \dfrac{R^2C - 4L}{L^2C}$.

<u>*1er cas*</u> : Si $R^2C > 4L$ alors $\Delta > 0$ et il y a deux solutions réelles négatives λ_1 et λ_2. Donc

$$q_h(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$$

La solution générale est alors

$$q(t) = q_h(t) + q_P(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + CU_0$$

Les conditions initiales $q(0) = 0$ et $\dot{q}(0) = 0$ donne le système

$$\begin{cases} K_1 + K_2 + CU_0 = 0 \\ \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0 \end{cases}$$

qui se résoud en

$$\begin{cases} K_1 = CU_0 \, \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ K_2 = -CU_0 \, \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} . \end{cases}$$

La solution est alors

$$q(t) = CU_0 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot e^{\lambda_2 t} + 1 \right)$$

et

$$i(t) = \dot{q}(t) = CU_0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} \right)$$

<u>*3ème cas*</u> : Si $R^2 L < 4L$, il y a deux racines complexes conjuguées :

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \omega_0 i$$

avec $a = \dfrac{R}{2L} \geqslant 0$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{4L - R^2 C}{L^2 C}}$. Alors

$$q_h(t) = e^{-at} \big[K_1 \cos(\omega_0 t) + K_2 \sin(\omega_0 t) \big]$$

et la solution générale est

$$q(t) = q_h(t) + q_P(t) = e^{-at} \big[K_1 \cos(\omega_0 t) + K_2 \sin(\omega_0 t) \big] + CU_0$$

$q(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad K_1 = -CU_0$

$\dot{q}(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega_0 K_2 - a K_1 = 0$ d'où $K_2 = -\dfrac{CU_0 a}{\omega_0}$. Donc

$$q(t) = CU_0 \left[-e^{-at} \left(\frac{a}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t) \right) + 1 \right]$$

et

$$i(t) = \dot{q}(t) = CU_0 \cdot e^{-at} \cdot \left(\frac{a^2}{\omega_0} + \omega_0 \right) \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Cas particulier : Si $a = 0$ (pas de résistance), alors

$$q(t) = CU_0\big[1 - \cos(\omega_0 t)\big] \qquad\qquad i(t) = CU_0\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Remarque. En supposant R^2C négligeable par rapport à $4L$, on a

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4L - R^2C}{L^2C}} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et la fréquence d'oscillation est alors

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Application numérique :
Pour avoir une fréquence d'oscillations de $10kHz$, on peut choisir $C = 100nF$ et $L = 2.553mH$.
Pour avoir $R^2C << 4L$ il faut alors $R << \sqrt{\frac{4L}{C}}$ donc $R << 320\omega_0$.

Remarque : dans une fonction $\sin(\omega t) = \sin(2\pi f t)$, ω est la pulsation et f la fréquence avec la relation

$$\omega = 2\pi f.$$

Chapitre 7

Calcul différentiel à plusieurs variables

7.1 L'espace $\mathbb{R}^n$

7.1.1 Structures sur $\mathbb{R}^n$

– L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $x_i \in \mathbb{R}$. On notera

$$\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

– x est un **point** de $\mathbb{R}^n$.

– Le point $\mathrm{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ sera aussi considéré comme un vecteur-colonne

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

– Les x_i sont les **composantes** de x.

Notation :
Dans $\mathbb{R}^2$ on notera (x, y) plutôt que (x_1, x_2)
Dans $\mathbb{R}^3$ on notera (x, y, z) au lieu de (x_1, x_2, x_3).

L'espace $\mathbb{R}^n$ a les propriétés suivantes :

- L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni d'une **addition** :

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) + (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \ldots,\ x_n + y_n)$$

  et d'une **multiplication par un scalaire** :

$$\lambda \cdot (x_1,\ \ldots,\ x_n) = (\lambda x_1,\ \ldots,\ \lambda x_n).$$

  Ces 2 opérations font de $\mathbb{R}^n$ un espace vectoriel.
  L'élément neutre pour l'addition est l'origine : $O(0, 0, \ldots, 0)$.

- L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni d'un **produit scalaire** :

$$< \cdot\, , \cdot > \,:\, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{défini par}$$

$$< \mathrm{x}, \mathrm{y} > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathrm{x}^T \cdot \mathrm{y} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni d'une **norme** :

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{définie par}$$

$$\|\mathrm{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{< \mathrm{x}, \mathrm{x} >}.$$

- Il est muni d'une **métrique** (ou **distance**) :

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{définie par}$$

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

  qui satisfait les propriétés suivantes :
  (i) $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \geqslant 0$
  (ii) $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{x} = \mathrm{y}$
  (iii) $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = d(\mathrm{y}, \mathrm{x})$ (symétrie)
  (iv) $d(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \leqslant d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z})$ (inégalité du triangle)

  pour tout $\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z} \in \mathbb{R}^n$.
- Les vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  forment une **base orthonormale** de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 7.1. Si $n = 1$, on a $\|x\| = |x|$ et $d(x, y) = |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Dans ce chapitre, on va considérer les fonctions

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

avec $D \subset \mathbb{R}^n$. A un point $\mathrm{x} \in D$ on associe donc un vecteur $f(\mathrm{x}) \in \mathbb{R}^m$.

Exemples 7.2.

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = x^2 + \sin y$

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos t \\ t \sin t \end{pmatrix}$

3. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + yz \\ x^2 + y^2 + e^z \\ \sin(yz) \end{pmatrix}$

7.2 Courbes dans $\mathbb{R}^n$

7.2.1 Définition

Définition : Une courbe (dans $\mathbb{R}^n$) est une fonction continue $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ où I est un intervalle de R. On associe donc pour chaque $t \in I$ un vecteur

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

où les $x_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions réelles.

Proposition 7.3. *γ est continue si et seulement si les x_i sont continues pour tout i.*

Remarques :
- C'est une courbe paramétrisée. La variable t s'appelle le **paramètre** de γ.
- Si l'on peut écrire $x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ pour tous les points de γ, alors γ est le graphe d'une fonction à $n-1$ variables.

Exemple :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Alors $y = e^x$.
- Si l'on peut écrire $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ en éliminant le paramètre t, on a obtenu l'**équation cartésienne implicite** de γ. (ce n'est pas toujours possible). On perd cependant la notion du "temps".

Exemple :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$$

Alors $x^2 + y^2 = R^2$.

7.2.2 Dérivabilité

Définition 7.4 (Vecteur tangent)**.** Si les fonctions $x_i(t)$ sont dérivables pour tout i, on définit le **vecteur tangent** par

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot x_2(t) \\ \vdots \\ \dot x_n(t) \end{pmatrix}$$

où $\dot{x_i}(t) = \dfrac{dx_i}{dt}(t)$.

On note parfois $v(t) = \dot\gamma(t)$.

Interprétation physique : si t représente **le temps** et $\gamma(t)$ la position d'un mobile, alors $\dot{\gamma}(t)$ est le **vecteur-vitesse**. Sa norme

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\dot{x_1}^2(t) + \cdots + \dot{x}_n^2(t)}$$

est la **vitesse** du mobile.
En dérivant encore $\dot{\gamma}(t)$, on obtient le **vecteur d'accélération**

$$\ddot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x_1}(t) \\ \ddot{x_2}(t) \\ \vdots \\ \ddot{x_n}(t) \end{pmatrix}$$

Quelques exemples

1) Mouvement rectiligne uniforme (MRU). Soit $a, v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs fixés. Alors la courbe
$$\gamma(t) = a + v \cdot t \qquad (*)$$
est une droite passant par le point a et de vecteur directeur v.

Vecteur tangent (vitesse) : $\dot{\gamma}(t) = v$ est constante.

- Si $n = 2$, équation cartésienne : $v_2 x - v_1 y = v_2 a_1 - v_1 a_2$ avec $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.
- Si $n = 3$, l'élimination de t donne 2 équations cartésiennes, chacune étant l'équation d'un plan et l'intersection des 2 plans donne la droite.

2) Mouvement circulaire uniforme (MCU) : soit
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$$

- Equation cartésienne : $x^2 + y^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t = R^2$.
- Vitesse : $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix}$ et donc
$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R.$$
La vitesse est constante.
- Accélération : $\ddot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -R\cos t \\ -R\sin t \end{pmatrix} = -\gamma(t)$. L'accélération est dirigée vers le centre.

3) Hélice : soit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ ct \end{pmatrix} \qquad \text{avec } R, c > 0.$$

C'est la superposition d'un mouvement circulaire uniforme (MCU) dans le plan Oxy et d'un mouvement rectiligne uniforme (MRU) le long de l'axe Oz.

4) Chute libre : $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_1 t \\ y_0 + v_2 t \\ z_0 + v_3 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 - gt \end{pmatrix} \qquad \ddot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Changement de paramétrisation

Soit $I = [a, b]$ et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe. Soit $J = [c, d]$ et

$$\begin{aligned} \varphi : J &\longrightarrow I \\ s &\mapsto t \end{aligned}$$

une fonction continue bijective telle que $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$.
Alors la courbe

$$\begin{aligned} \gamma \circ \varphi \, : \, J &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ s &\mapsto \gamma\left(\varphi(s)\right) \end{aligned}$$

est la "même" courbe que γ mais avec une paramétrisation différente.
La fonction $t = \varphi(s)$ est le **changement de paramétrisation**.

Interprétation physique : si t est le temps, le changement de paramétrisation revient à parcourir la courbe γ avec une autre vitesse. Plus précisement

$$\frac{d}{ds}\gamma(\varphi(s)) = \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} x_1(\varphi(s)) \\ \vdots \\ x_n(\varphi(s)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot x_1(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \\ \vdots \\ \dot x_n(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \end{pmatrix} = \dot\gamma(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s).$$

Exemple : Reprenons la courbe

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Si l'on pose $t = s^2 = \varphi(s)$, la courbe devient

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma \circ \varphi(s) = \begin{pmatrix} R\cos s^2 \\ R\sin s^2 \end{pmatrix} \qquad 0 \leqslant s \leqslant \sqrt{2\pi}$$

Alors $\tilde{v}(s) = \dfrac{d}{ds}\tilde{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} -2sR\sin s^2 \\ 2sR\cos s^2 \end{pmatrix}$ et donc

$$v(s) = \|\tilde{v}(s)\| = \sqrt{4s^2R^2\sin^2 s^2 + 4s^2R^2\cos^2 s^2} = 2sR$$

La vitesse n'est plus constante.

7.2.3 Longueur d'une courbe

Soit $P \leftrightarrow \gamma(t)$ et $Q \leftrightarrow \gamma(t+\Delta t)$ deux points de la courbe proches l'un de l'autre (avec $\Delta t > 0$). On a

$$u = \overrightarrow{PQ} = \gamma(t+\Delta t) - \gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t+\Delta t) - x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t+\Delta t) - x_n(t) \end{pmatrix}$$

Alors la longueur de la corde PQ est égale à

$$\begin{aligned}
\Delta L = \|u\| &= \sqrt{[x_1(t+\Delta t) - x_1(t)]^2 + \cdots + [x_n(t+\Delta t) - x_n(t)]^2} \\
&= \sqrt{\left[\frac{x_1(t+\Delta t) - x_1(t)}{\Delta t}\right]^2 + \cdots + \left[\frac{x_n(t+\Delta t) - x_n(t)}{\Delta t}\right]^2} \cdot \Delta t \\
&\xrightarrow{\Delta t \to 0} \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \cdots + \dot{x}_n(t)^2} \cdot dt \\
&= \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt.
\end{aligned}$$

La longueur de la courbe entre $t = a$ et $t = b$ vaut donc

$$\boxed{L = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt}$$

Théorème 7.5. *La longueur d'une courbe est indépendante de la paramétrisation*

DÉM : On a $t = \varphi(s)$ avec $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$. On doit montrer que

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt = \int_c^d \left\| \frac{d}{ds}\left[\gamma \circ \varphi(s)\right] \right\| ds.$$

On suppose que $c < d$ ce qui implique, comme φ est une bijection, que $\varphi'(s) > 0$ pour tout $s \in J$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_c^d \left\| \frac{d}{ds} [\gamma \circ \varphi(s)] \right\| ds &= \int_c^d \left\| \dot{\gamma}\big(\varphi(s)\big) \cdot \varphi'(s) \right\| ds \\
&= \int_c^d \|\dot{\gamma}(\varphi(s))\| \cdot |\varphi'(s)| \, ds \\
&= \int_c^d \|\dot{\gamma}(\varphi(s))\| \cdot \varphi'(s) \, ds \\
&= \int_c^d \sqrt{\dot{x}_1(\varphi(s))^2 + \dot{x}_2(\varphi(s))^2 + \cdots + \dot{x}_n(\varphi(s))^2} \cdot \varphi'(s) \, ds \\
&\text{on pose } t = \varphi(s) \text{ et donc } dt = \varphi'(s)ds \\
&= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2 + \cdots + \dot{x}_n(t)^2} \; dt \\
&= \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = L
\end{aligned}$$

$\square$

7.2.4 Angle entre deux courbes

Soient γ_1 et γ_2 deux courbes et $P = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ un point d'intersection. Alors l'angle entre γ_1 et γ_2 au point P est donnée par la formule

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\langle \, \dot{\gamma}_1(t_1) \, , \, \dot{\gamma}_2(t_2) \, \rangle}{\|\dot{\gamma}_1(t_1)\| \cdot \|\dot{\gamma}_2(t_2)\|}}$$

7.3 Fonctions réelles à plusieurs variables

Une fonction réelle de n variables réelles est une application

$$f \; : \; D \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{avec } D \subset \mathbb{R}^n.$$

On associe ainsi à tout point $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D$, un **nombre réel** $f(\mathrm{x}) \in \mathbb{R}$.

Exemple : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 10z$.

7.3.1 Graphe

Si $n = 2$, on peut définir et dessiner le graphe G_f d'une fonction $f(x, y)$. C'est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$

$$G_f = \{(x, y, z) \,|\, z = f(x, y)\}.$$

Remarque : le graphe d'une fonction à 2 variables est de dimension 3. De ce fait, si $n \geqslant 3$, le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ peut toujours être défini mais il est de dimension $n + 1$ et ne peut donc pas être représenté ni même imaginé.

7.3.2 Ensembles et courbes de niveau

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et c un nombre réel. Alors l'ensemble

$$N_f(c) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathrm{x}) = c\}$$

est appelé **ensemble de niveau c de f**.

- Dans le cas d'une fonction à 2 variables, $N_f(c)$ est appelé une **courbe de niveau**.

Interprétation : si $f(x, y)$ est l'altitude du point (x, y) sur une carte, une courbe de niveau $N_f(c)$ représente l'ensemble des points qui ont une altitude donnée c.

- Si $n = 3$, on parle de **surface de niveau**.

Exemples 7.6.

1. Soit $f(x_1, x_2, x_2, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ Alors pour $c > 0$, l'ensemble de niveau

$$N(c) = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = c\right\} = \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \|\mathrm{x}\| = \sqrt{c}\right\}$$

   est une (hyper)-sphère de rayon $\sqrt{c}$.

2. Graphe et courbes de niveau de la fonction $z = f(x, y) = xy$.

   Courbes de niveau $c \neq 0$: $f(x, y) = c \Longleftrightarrow xy = c \Longleftrightarrow y = \dfrac{c}{x}$
   Les courbes ne niveau $c \neq 0$ sont des hyperboles.
   La courbe de niveau 0 est donnée par $xy = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$. Donc

$$N_f(0) = \text{axe Ox} \ \cup \ \text{axe Oy}$$

   Le graphe de $f(x, y)$ est un hyperboloïde.

3. Graphe et courbes de niveau de $z = f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

   Courbes de niveau : $N_f(c) = \{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 = c\}$.
   Si $c < 0$, l'ensemble $N_f(c)$ est vide.
   Si $c = 0$, la courbe de niveau est un point : $(0, 0)$
   Si $c > 0$ alors $N_f(c)$ est une ellipse d'équation standard

$$\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right)^2 + \left(\frac{2y}{\sqrt{c}}\right)^2 = 1$$

   Le graphe $z = f(x, y) = x^2 + 4y^2$ est un paraboloïde.

4. Graphe et courbes de niveau de $f(x, y) = x + 2y + 6$.

   Le graphe $z = f(x, y) = x+2y+6$ est un plan dont l'équation normale est $x+2y-z+6 = 0$.
   Son vecteur normal est donc $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Les courbes de niveau c sont d' équation $x + 2y + 6 = c$. Ce sont des droites parallèles de vecteur directeur $v_c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Soit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
   Alors, pour $c > 0$, l'ensemble de niveau est la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = c$. C'est une sphère de rayon $\sqrt{c}$.
   Si $c = 0$, l'ensemble de niveau $N_f(0)$ est un point : $(0, 0)$.
   Si $c < 0$, $N_f(c)$ est vide.

6. Les surfaces de niveau de la fonction

$$f(x, y, z) = x - 3y + 4z$$

   sont des plans parallèles d'équation $x - 3y + 4z = c$. Leur vecteur normal est $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

7.4 Dérivées partielles

Dans ce paragraphe D désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à n variables et $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$ un point fixé. Considérons la fonction

$$g_i(\xi) = f(a_1,\ \ldots,\ a_{i-1},\ \xi,\ a_{i+1},\ \ldots,\ a_n).$$

C'est une fonction à une variable.
La dérivée de g est appelée la **dérivée partielle de f par rapport à la variable x_i.**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &:= \frac{dg_i}{d\xi}(a_i)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g_i(a_i+h)-g_i(a_i)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\ldots,a_n)-f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+he_i)-f(a)}{h}.\end{aligned}$$

On a les notations équivalentes :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_i f(a) = f_{x_i}(a) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\mathrm{x}=a}}$$

Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **partiellement différentiable sur** D si les dérivées partielles $f_{x_i}(\mathrm{x})$ existent pour tout $\mathrm{x} \in D$ et pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$.
Ceci définit alors une fonction $f_{x_i} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ pour tout i.

Calcul effectif : la dérivée partielle par rapport à x_i se calcule donc en dérivant par rapport à x_i en considérant les autres variables comme des constantes.

Exemples 7.7.
1. Soit $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1x_2^2 + x_1\sin x_4 + e^{x_2^2}$. Alors

$$\begin{aligned} f_{x_1} &= 2x_2^2 + \sin x_4 & f_{x_2} &= 4x_1x_2 + 2x_2e^{x_2^2}\\ f_{x_3} &= 0 & f_{x_4} &= x_1\cos x_4\end{aligned}$$

2.

$f(x,y)$	f_x	f_y
xy^2	y^2	$2xy$
$\sin(x+2y)$	$\cos(x+2y)$	$2\cos(x+2y)$
$e^{\frac{y}{x}}$	$-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}$	$\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}$
x^{2y}	$2yx^{2y-1}$	$2\ln x \cdot x^{2y}$

3. Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0\\ 0 & \text{en } (0,0)\end{cases}$$

Nous avons déjà vu que f n'est pas continue en $(0,0)$
Mais

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

et

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$

Ainsi la fonction $f(x,y)$ est dérivable en $(0,0)$ bien qu'elle ne soit pas continue.

Donc en dimension $n \geqslant 2$, dérivable $\;\not\Longrightarrow\;$ continue

Remarquons cependant que

$$f_x(x,y) = \frac{y(x^2+y^2)-(xy)(2x)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{pour tout } (x,y) \neq (0,0)$$

Sur la droite $x = 0$ ($y \neq 0$) on a donc

$$f_x(0,y) = \frac{y^3}{y^4} = \frac{1}{y} \xrightarrow{y \to 0} +\infty$$

et sur la droite $y = 0$ ($x \neq 0$), on a

$$f_x(x,0) = 0 \xrightarrow{x \to 0} 0$$

La fonction $f_x(x,y)$ n'est donc pas continue en $(0,0)$.

On peut montrer que si les $f_{x_i}(\mathrm{x})$ sont continues en a pour tout i, alors $f(\mathrm{x})$ est continue en a.

7.4.1 Gradient

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction partiellement différentiable et a un point de D. Le vecteur-ligne

$$\begin{pmatrix} f_{x_1}(a) & f_{x_2}(a) & \dots & f_{x_n}(a) \end{pmatrix}$$

est appelé **le gradient de f en a**. Il est noté $\nabla f(a)$.
Le gradient définit donc une fonction

$$\begin{aligned} \nabla f \, : \, D &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathrm{x} &\mapsto \nabla f(\mathrm{x}) \end{aligned}$$

Le gradient en a est parfois aussi noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a)$.

Exemples 7.8.
1. si $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 10$ alors

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 4y \end{pmatrix}$$

2. $f(x,y,z) = x^2y + 3xyz + \sin(xy)$ alors

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy + 3yz + y\cos(xy) & x^2 + 3xz + x\cos(xy) & 3xy \end{pmatrix}$$

7.4.2 Approximation du 1er ordre and plan tangent

Définition 7.9 (Fonction de classe C^1)**.** Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$ est dite **continûment différentiable** si toutes ses dérivées partielles existent et sont continues sur D. On dit dans ce cas que f est de classe C^1 et on note $f \in C^1(D, \mathbb{R})$.

Théorème 7.10 (Théorème d'approximation du premier ordre). *Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(D, \mathbb{R})$. Alors pour tout point $a \in D$, il existe une fonction réelle R_1 définie sur un voisinage V de a telle que*

$$f(\mathrm{x}) = f(a) + \underbrace{\nabla f(a) \cdot (\mathrm{x} - a)}_{=\langle \nabla f(a),\, \mathrm{x}-a\rangle} \quad + \quad R_1(\mathrm{x}) \qquad \forall \mathrm{x} \in V$$

avec

$$\lim_{\mathrm{x}\to a} \frac{R_1(\mathrm{x})}{\|\mathrm{x} - a\|} = 0.$$

La fonction R_1 est appelée le reste d'ordre 1. C'est un $o(\|\mathrm{x} - a\|)$.
Ici, x et a sont vus comme des vecteurs-colonne

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Remarque 1 : en posant $u = \mathrm{x} - a \in \mathbb{R}^n$, la formule précédente s'écrit alors

$$f(a + u) = f(a) + \nabla f(a) \cdot u + r(u)$$

avec $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{r(u)}{\|u\|} = 0$. Autrement dit avec $r(u) = o(\|u\|)$.

Remarque 2 :

- Si $n = 1$, on retrouve l'approximation de Taylor du premier ordre autour de $a = x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \; + \; R(x)$$

avec $R(x) = o(x - x_0)$ et l'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est celle de la tangente au graphe de f en x_0.

- Si $n = 2$, on trouve, autour du point $a = (x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + R(x, y) \\ &\approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0). \end{aligned}$$

L'équation

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)}$$

est l'équation du <u>plan tangent au graphe de f au point (x_0, y_0)</u>.
Exemple : soit

$$f(x, y) = 2 + x^2 y - y^3.$$

Alors

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Soit $a = (x_0, y_0) = (1, 2)$. Ceci donne $f(1, 2) = -4$ et $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} 4 & -11 \end{pmatrix}$
Approximation du 1er ordre autour de a :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + R(x) \\ &\approx -4 + \begin{pmatrix} 4 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} \\ &= -4 + 4(x - 1) - 11(y - 2). \end{aligned}$$

L'équation $z = -4 + 4(x - 1) - 11(y - 2)$ est l'équation du plan tangent au graphe de f passant par $P(1,\ 2,\ -4)$.
De manière générale, l'équation du plan tangent au graphe de $f(x, y)$ au point (x_0, y_0) est

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

On peut réécrire l'équation comme suit :

$$f_x(x_0, y_0) \cdot x + f_y(x_0, y_0) \cdot y - z + d = 0$$

ce qui montre que le vecteur normal au plan tangent est

$$\boxed{n = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}}$$

On peut généraliser ce résultat à n variables.
L'équation de **l'hyperplan tangent** au graphe de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ au point $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est alors donnée par

$$\boxed{x_{n+1} = f(a_1, \ldots, a_n) + \nabla f(a) \cdot (\mathrm{x} - a)}$$

où $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

7.4.3 Règles de dérivation

• **Addition :** soit $f, g \in C^1(D, \mathbb{R})$. Alors

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g.$$

• **Produit :** soient $f, g \in C^1(D, \mathbb{R})$ avec $D \subset \mathbb{R}^n$. On peut considérer la fonction fg définie par $(fg)(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x})g(\mathrm{x})$. Alors

$$\nabla(fg)(a) = \nabla(f)(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot \nabla g(a).$$

En abrégé :

$$\boxed{\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f}.$$

- **Composition :** soit $I \subset \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

une courbe (différentiable) dans $\mathbb{R}^n$.
Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à n variables. Si l'on suppose que $\mathrm{Im}(\gamma) \subset D$, on peut définir la fonction composée

$$\Phi(t) = f(\gamma(t)) = f(x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t))$$

qui est une fonction à une variable. Que vaut alors $\frac{d}{dt}\Phi(t)$?
Réponse :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi(t) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \cdot \frac{dx_2}{dt} + \ldots \\ &\qquad \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \cdot \frac{dx_n}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\gamma(t)) \cdot \dot{x}_i(t) \\ &= \nabla f(\gamma(t)) \quad \cdot \quad \dot{\gamma}(t) \\ &= \langle \nabla f(\gamma(t))\ ,\ \dot{\gamma}(t) \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(f \circ \gamma\right)(t) = \nabla f\left(\gamma(t)\right) \cdot \dot{\gamma}(t)} \tag{7.1}$$

Exemple (vérification) : $f(x,y) = x^2 + y^2$ et

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\Phi(t) = \left(f \circ \gamma\right)(t) = f(\cos t,\ \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

et donc $\Phi'(t) = 0$.
Avec la formule :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x = 2x \\ f_y = 2y \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = -\sin t \\ \dot{y}(t) = \cos t \end{array} \right.$$

Ceci donne

$$\nabla f = (2x \quad 2y) = (2\cos t \quad 2\sin t) \qquad \text{et} \qquad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Alors

$$\Phi'(t) = \nabla f \cdot \dot{\gamma}(t) = -2\cos t \sin t + 2\sin t \cos t = 0.$$

Démonstration de (7.1) : Sans perte de généralité, on démontre la formule en $t = 0$. Posons $a = \gamma(0) \in \mathbb{R}^n$. Par l'approximation du 1er ordre autour de a, on a

$$f(\mathrm{x}) = f(a) + \langle \nabla f(a)\,,\, \mathrm{x} - a\rangle + R(\mathrm{x})$$

avec $\lim_{\mathrm{x}\to a} \dfrac{R(\mathrm{x})}{\|\mathrm{x} - a\|} = 0$.
Ceci donne, en notant $\mathrm{x} = \gamma(h) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi(h) - \Phi(0)}{h} &= \frac{f\big(\gamma(h)\big) - f\big(\gamma(0)\big)}{h} = \frac{f(\mathrm{x}) - f(a)}{h} \\
&= \frac{\langle \nabla f(a)\,,\, \mathrm{x} - a\rangle}{h} + \frac{R(\mathrm{x})}{h} \\
&= \left\langle \nabla f(a)\,,\, \frac{\gamma(h) - \gamma(0)}{h} \right\rangle + \frac{R(\mathrm{x})}{\|\mathrm{x} - a\|} \cdot \underbrace{\frac{\|\mathrm{x} - a\|}{h}}_{= \frac{\|\gamma(h) - \gamma(0)\|}{h}} \\
&\xrightarrow{h\to 0} \quad \langle \nabla f(a)\,,\, \dot{\gamma}(0)\rangle + 0 \cdot \|\dot{\gamma}(0)\| \\
&= \langle \nabla f(a)\,,\, \dot{\gamma}(0)\rangle
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\Phi'(0) = \langle \nabla f(a)\,,\, \dot{\gamma}(0)\rangle$. □

7.4.4 Dérivée directionnelle

Définition 7.11. Soit $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ avec D un ouvert de R^n, a un point de D et $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul. La quantité

$$D_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

s'appelle la dérivée directionnelle de f en a le long de v.

Théorème 7.12. *On a*

$$D_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v = \langle \nabla f(a)\,,\, v\rangle.$$

Démonstration : Approximation du 1er ordre :

$$f(a + tv) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (tv) + R(a + tv)$$

et donc

$$\begin{aligned}
D_v f(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\nabla f(a) \cdot (tv) + R(a + tv)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\nabla f(a) \cdot (tv)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{R(a + tv)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \nabla f(a) \cdot v + 0 \\
&= \nabla f(a) \cdot v.
\end{aligned}$$

□

Remarque 1 : si $v = e_i$ alors

$$D_{e_i} f(a) = \nabla f(a) \cdot e_i = \begin{pmatrix} f_{x_1}(a) & f_{x_2}(a) & \dots & f_{x_n}(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = f_{x_i}(a).$$

Remarque 2 : si v est de norme 1 alors

$$D_v f(a) = \langle \nabla f(a)\,,\, v \rangle = \|\nabla f(a)\| \cdot \cos(\alpha)$$

où α est l'angle entre v et $\nabla f(a)$.

Ainsi

$$\begin{aligned} D_v f(a) \text{ est maximal} \quad &\iff \quad \cos\alpha = 1 \quad \iff \quad \alpha = 0 \\ &\iff \quad v \text{ et } \nabla f(a) \text{ sont de même sens et de même direction.} \end{aligned}$$

En conclusion,

le gradient donne la direction dans laquelle la dérivée de f est la plus grande.

De plus

la pente de f dans cette direction vaut $\|\nabla f(a)\|$.

Résumé :

$$\boxed{D_v f(a) = \langle \nabla f(a)\,,\, v \rangle = \text{ dérivée directionnelle de } f \text{ le long de } v}$$

$$\boxed{\text{pente de } f \text{ dans la direction } v = \frac{D_v f(a)}{\|v\|} = \left\langle \nabla f(a)\,,\, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle}$$

7.4.5 Gradient et courbes de niveau

Reprenons la règle de composition.
Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à n variables et $\gamma(t)$ une courbe dans D, alors

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = D_{\dot{\gamma}} f(\gamma(t)) \qquad (*)$$

On peut donc interpréter la dérivée $\frac{d}{dt} f(\gamma(t))$ comme la pente de la fonction f en suivant la courbe $\gamma(t)$.

Exemple : Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$. Alors

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}.$$

Si l'on suit la courbe $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix}$ alors $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) &= D_{\dot{\gamma}} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)) \,, \dot{\gamma}(t) \rangle \\ &= (2t\cos t \quad 2t\sin t) \cdot \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \end{pmatrix} \\ &= 2t\cos^2 t - 2t^2 \cos t \sin t + 2t\sin^2 t + 2t^2 \sin t \cos t = 2t \end{aligned}$$

Courbes de niveau

Si $\gamma(t)$ est une courbe contenue dans l'ensemble de niveau $N_f(c)$ alors $f(\gamma(t)) = c$ par définition de $N_f(c)$ et on doit avoir

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0.$$

Ceci donne par $(*)$ ci-dessus :

$$\langle \nabla f(\gamma(t)) \,, \dot{\gamma}(t) \rangle = 0.$$

Le gradient est donc orthogonal à $\dot{\gamma}(t)$.

Comme ceci est vrai pour toute courbe $\gamma(t)$ contenue dans $N_f(c)$, on en déduit que

le gradient est toujours orthogonal aux ensembles de niveau.

En particulier,

le gradient d'une fonction à 2 variables est toujours orthogonal aux courbes de niveau.

Exemple : $f(x,y) = x^2 + 2y^2$. Alors $\nabla f = (2x \quad 4y)$.
Les courbes de niveau c^2 sont d'équation

$$x^2 + 2y^2 = c^2.$$

Ce sont donc des ellipses de centre $(0,0)$ et de demi-axe c et $\dfrac{c}{\sqrt{2}}$.

On vérifie que le vecteur $\nabla f = (2x \quad 4y)$ est bien perpendiculaire aux ellipses ci-dessus.

Illustration : le point $P(1,2)$ est sur l'ellipse (γ) : $x^2 + 2y^2 = 9$.
En dérivant, on obtient $2x + 4y \cdot y' = 0$ ce qui donne $y' = -\dfrac{x}{2y}$. Au point $P(1,2)$, on a donc $y'\big|_P = -\dfrac{1}{4}$. Un vecteur tangent est donc

$$v = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le gradient de f en P vaut $(\ 2 \quad 8\ )$. Il est bien perpendiculaire au vecteur v.

7.4.6 Dérivées partielles d'ordres supérieurs

Soit $f(\mathrm{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction à n variables définie sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$. On définit les dérivées d'ordre 2 comme suit

Définition 7.13.

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Si $i = j$, on note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ au lieu de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$.

Exemple :

$$f(x,y) = x^2 y + y e^x .$$

Alors

$$f_x = 2xy + ye^x \qquad \text{et} \qquad f_y = x^2 + e^x .$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(2xy + ye^x) = 2y + ye^x \\
f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + e^x) = 0 \\
f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + e^x) = 2x + e^x \\
f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial y}(2xy + ye^x) = 2x + e^x .
\end{aligned}$$

On constate dans cet exemple que $f_{xy} = f_{yx}$.

ATTENTION : en général, $f_{x_i x_j} \neq f_{x_j x_i}$. Mais on a le théorème suivant :

Théorème 7.14. *Si $f_{x_i x_j}$ et $f_{x_j x_i}$ sont continues dans un voisinage du point a, alors $f_{x_i x_j}(a) = f_{x_j x_i}(a)$.*

¨Démonstration¨ : La démonstration est faite dans le cas $n = 2$.
Soit $f(x, y)$ et $a = (x_0, y_0)$. Soient $h, k > 0$ tels que le rectangle

$$\{(x, y) \,|\, x_0 - h < x < x_0 + h \,,\, y_0 - k < y < y_0 + k\} \subset D.$$

Définissons les fonctions

$$g_1(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0) \qquad \text{et} \qquad g_2(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$$

Alors

$$g_1'(x) = f_x(x, y_0 + k) - f_x(x, y_0) \qquad \text{et} \qquad g_2'(y) = f_y(x_0 + h, y) - f_y(x_0, y).$$

Posons encore

$$F(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0).$$

Alors

$$F(h, k) = g_1(x_0 + h) - g_1(x_0) \tag{7.2}$$

et

$$F(h, k) = g_2(y_0 + k) - g_2(y_0). \tag{7.3}$$

Le théorème de la moyenne appliqué à (7.2) puis à f_x donne

$$\begin{aligned}
F(h,\, k) &= g_1(x_0 + h) - g_1(x_0) \\
&= g_1'(x_0 + \theta_1 h) \cdot h \qquad \theta_1 \in]0; 1[\\
&= [f_x(x_0 + \theta_1 h,\, y_0 + k) - f_x(x_0 + \theta_1 h,\, y_0)] \cdot h \\
&= f_{yx}(x_0 + \theta_1 h,\, y_0 + \theta_2 k) \cdot k \cdot h \qquad \theta_2 \in]0; 1[.
\end{aligned}$$

Ce même théorème de la moyenne appliqué à (7.3) et f_y donne

$$\begin{aligned}
F(h,\, k) &= g_2(y_0 + k) - g_2(y_0) \\
&= g_2'(y_0 + \theta_3 k) \cdot k \qquad \theta_3 \in]0; 1[\\
&= [f_y(x_0 + h,\, y_0 + \theta_3 k) - f_y(x_0,\, y_0 + \theta_3 k)] \cdot k \\
&= f_{xy}(x_0 + \theta_4 h,\, y_0 + \theta_3 k) \cdot k \cdot h \qquad \theta_4 \in]0; 1[.
\end{aligned}$$

Donc $f_{xy}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k) \cdot kh = f_{yx}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) \cdot kh$.

Comme f_{xy} et f_{yx} sont continues, en passant à la limite $h, k \to 0$, on obtient

$$f_{xy}(x_0,\ y_0) = f_{yx}(x_0,\ y_0)\,.$$

$\square$

Définition 7.15. On dit que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est de classe C^2 sur $D \subset \mathbb{R}^n$ si toutes ces dérivées d'ordre 2 sont continues en tout point de D. On note alors

$$f \in C^2(D, \mathbb{R})$$

On généralise sans peine les définitions précédentes pour définir les dérivées partielles d'ordre $k \geqslant 2$.

Exemple : si $f(x, y)$ est une fonction à 2 variables, il y a, à priori, 8 dérivées partielles d'ordre 3 qui sont

$$f_{xxx} \quad f_{yxx} \quad f_{xyx} \quad f_{yyx} \quad f_{xxy} \quad f_{yxy} \quad f_{xyy} \quad f_{yyy}$$

Mais si ces 8 dérivées partielles sont continues, alors

$$f_{yxx} = f_{xyx} = f_{xxy} \qquad \text{et} \qquad f_{yyx} = f_{xyy} = f_{yxy}$$

Définition 7.16 (Fonction de classe C^k)**.** On dit qu'une fonction $f(\mathrm{x})$ est de classe C^k sur $D \subset \mathbb{R}^n$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre k (existent et) sont continues. On note alors

$$f \in C^k(D, \mathbb{R})$$

Théorème 7.17. *Si $f \in C^k(D, \mathbb{R})$, alors ses dérivées partielles d'ordre k ne dépendent pas de l'ordre de dérivation mais uniquement du nombre de fois qu'une variable intervient.*

Définition 7.18 (Matrice hessienne)**.** Soit $f(\mathrm{x})$ une fonction à n variables dont les dérivées partielles du 2ème ordre existent. La matrice

$$H_f(\mathrm{x}) = \big(f_{x_i x_j}(\mathrm{x})\big)_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathrm{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathrm{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathrm{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathrm{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathrm{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathrm{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathrm{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathrm{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathrm{x}) \end{pmatrix}$$

s'appelle la **matrice hessienne de f au point** x.

Remarque : Si $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ alors la matrice H_f est symétrique : $H_f^T = H_f$.

Exemple : si $n = 2$ et $f = f(x, y)$ alors

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Exemple : soit $f(x, y) = 2x^2y + xe^y + 10$. Alors

$$f_{xx} = 4y \qquad f_{xy} = 4x + e^y = f_{yx} \qquad f_{yy} = xe^y$$

et donc

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x + e^y \\ 4x + e^y & xe^y \end{pmatrix}$$

qui est symétrique. Au point $(2, 0)$, par exemple, on a $H_f(2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$.

Théorème 7.19 (Approximation de Taylor d'ordre 2)**.** *Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ et $f \in C^2(D, \mathbb{R})$. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$. Alors*

$$f(\mathrm{x}) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (\mathrm{x} - a) + \frac{1}{2}(\mathrm{x} - a)^T \cdot H_f(a) \cdot (\mathrm{x} - a) + R_2(\mathrm{x}) \qquad \forall \mathrm{x} \in D$$

avec $\lim\limits_{\mathrm{x} \to a} \dfrac{R_2(\mathrm{x})}{\|\mathrm{x} - a\|^2} = 0$.
La fonction R_2 est le **reste d'ordre 2**. *C'est un $o\big(\|\mathrm{x} - a\|^2\big)$.*

Cas particulier : Si $f = f(x, y)$ et $a = (x_0, y_0)$, la formule devient

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + R_2(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \frac{1}{2} \Big[f_{xx}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 \\ &\quad + 2 f_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 \Big] + R_2(x, y). \end{aligned}$$

Si $a = O(0, 0)$ (approximation à l'origine), ceci devient :

$$f(x, y) = f(O) + f_x(O) \cdot x + f(O) \cdot y + \frac{1}{2} f_{xx}(O) \cdot x^2 + f_{xy}(O) \cdot xy + \frac{1}{2} f_{yy}(O) \cdot y^2 + o(\|(x, y)\|^2)$$

Exemple 7.20. Reprenons l'exemple précédent : $f(x, y) = 2x^2y + xe^y + 10$ autour du point $P(3, 0)$. On a déjà calculer que

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x + e^y \\ 4x + e^y & xe^y \end{pmatrix}$$

et donc

$$H_f(3,0) = \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 13 & 3 \end{pmatrix}$$

De plus $\nabla f(x,y) = (4xy + e^y \;\; 2x^2 + xe^y)$ ce qui donne $\nabla f(3,0) = (1 \;\; 21)$. On obtient donc

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f(3,0) + (1 \;\; 21) \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-3 \;\; y) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 13 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix} \\ &= 13 + (x-3) + 21y + \frac{1}{2}[26(x-3)y + 3y^2] \\ &= 10 + x - 18y + 13xy + \frac{3}{2}y^2 \end{aligned}$$

7.5 Etude de fonction

7.5.1 Extremum

Définition 7.21. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. La boule $B(a,r)$ est le sous-ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ qui sont à une distance strictement inférieure à r du point a :

$$B(a,r) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathrm{x} - a\| < r\}$$

Définition 7.22. Un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ est dit borné s'il existe une boule $B(a,r)$ telle que $D \subset B(a,r)$.
Un sous-ensemble D fermé et borné est dit **compact**.

Définition 7.23. Soit $f \in C^0(D, \mathbb{R})$.

1. Un point $a \in D$ est un maximum (resp. minimum) absolu si $f(\mathrm{x}) \leqslant f(a)$ (resp. $f(\mathrm{x}) \geqslant f(a)$) pour tout $\mathrm{x} \in D$.
2. On dit que $f(\mathrm{x})$ admet un **maximum local** en $a \in D$ s'il existe une boule $B(a,r)$ telle que $f(\mathrm{x}) \leqslant f(a)$ pour tout $\mathrm{x} \in B(a,r)$. Ce maximum est **strict** si l'inégalité est stricte.
3. f admet un **minimum local** en $a \in D$ s'il existe une boule $B(a,r)$ telle que $f(\mathrm{x}) \geqslant f(a)$ pour tout $\mathrm{x} \in B(a,r)$. De même ce minimum est strict si l'inégalité est stricte.
4. On appelle **extremum** (local ou absolu) un point qui est un minimum ou un maximum (local ou absolu).

Théorème 7.24 (Condition nécessaire)**.** *Soit D un ouvert et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $a \in D$ est un extremum local et si f est dérivable en a, alors*

$$\nabla f(a) = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

autrement dit $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n.$

Démonstration : La preuve est identique à celle faite en dimension 1. Supposons que a soit un maximum. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \underbrace{(f(a + he_i) - f(a))}_{\leqslant 0} \quad \begin{cases} \leqslant 0 & \text{si } h > 0 \\ \geqslant 0 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$ □

Définition 7.25 (Point stationnaire)**.** Un point $a \in D$ tel que $\nabla f(a) = 0$ est appelé un **point stationnaire**

Pour les extremums absolus sur un fermé D, il faut tenir compte des frontières. Plus précisément :

Théorème 7.26. *Soit D un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Alors toute fonction continue $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ atteint son maximum et son minimum sur D ; c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{x}_M \in D$ et $\mathrm{x}_m \in D$ avec*

$$f(\mathrm{x}) \leqslant f(\mathrm{x}_M) \qquad et \qquad f(\mathrm{x}) \geqslant f(\mathrm{x}_m) \qquad \forall \mathrm{x} \in D.$$

De plus si $a \in D$ est un extremum absolu, alors

1) soit a est un point stationnaire (i.e. $\nabla f(a) = \vec{0}$) ;

2) soit $\nabla f(a)$ n'existe pas ;

3) soit a appartient à la frontière de D : $a \in \partial D$;

Démonstration : C'est un corollaire du théorème précédent. □

Contre-exemples :

- $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ sur $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ n'atteint pas son maximum car D n'est pas fermé.
- $f(x,y) = x^2 + y^2$ sur $D = \mathbb{R}^2$ n'atteint pas son maximum car D n'est pas borné.

Application : Pour trouver les extremums de f sur D, il faut donc, en plus des points stationnaires, restreindre la fonction f à la frontière de D et calculer les extremums de la fonction ainsi obtenue.

Exemple 7.27. Cherchons le minimum et le maximum de

$$f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3 + 2$$

sur le domaine D limité par les droites $x = 2$, $y = 2$ et $y = -2x + 2$.

(I) $f_x = 3y - 3x^2 \quad f_y = 3x - 3y^2$.
Les points stationnaires sont les solutions du système

$$\begin{cases} 3y - 3x^2 = 0 \\ 3x - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

qui sont $S_1(0,0)$ et $S_2(1,1)$. Seul S_2 est dans D.

(II) Bords de D :

- Droite $x = 2$: Alors
$$h(y) = f(2, y) = 6y - 8 - y^3 + 2$$
et donc $h'(y) = 6 - 3y^2$. Les zéros de $h'(y)$ sont en $y = \pm\sqrt{2}$. Ceci donne 2 points supplémentaires : $P_1(2, \sqrt{2})$ et $P_2(2, -\sqrt{2})$.

- Droite $y = 2$: Alors
$$g(x) = f(x, 2) = 6x - 8 - x^3 + 2$$
qui donne $g'(x) = 6 - 3x^2$ dont les zéros sont en $x = \pm\sqrt{2}$. Ceci donne un autre point dans D : $P_3(\sqrt{2}, 2)$

- Droite $y = -2x + 2$. La fonction f restreinte à cette droite donne
$$u(x) = f(x, -2x + 2) = 3x(-2x + 2) - x^3 - (-2x + 2)^3 + 2 = \cdots = 7x^3 - 30x^2 + 30x + 2$$
ce qui donne $u'(x) = 21x^2 - 60x + 30$ dont les zéros sont
$$x_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{270}}{21} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = 2.21... \qquad x_2 = 0.646.$$
Ceci donne un autre point dans D : $P_4(0.646\,,\ 0.707)$.

(III) Il faut encore calculer la fonction f dans les **coins de** D à savoir aux points $Q_1(2, 2)$, $Q_2(0, 2)$ et $Q_3(2, -2)$.
On obtient donc 8 points sur lesquels il faut étudier la fonction f :

$S_2 : f(1,\ 1) = 3$	$P_1 : f(2,\ \sqrt{2}) = -0.343$
$P_2 : f(2,\ -\sqrt{2}) = -11.65$	$P_3 : f(\sqrt{2},\ 2) = -0.343$
$P_4 : f(0.646,\ 0.707) = 2.748$	$Q_1 : f(2,\ 2) = -2$
$Q_2 : f(0,\ 2) = -6$	$Q_3 : f(2,\ -2) = -6.$

Le maximum est donc en $(1, 1)$ et le minimum en $(2, -\sqrt{2})$.

7.5.2 Classification des points stationnaires

On a vu que si $a \in D$ est un extremum local, que D est ouvert et que f est de classe C^1 alors $\nabla f(a) = 0$.
Mais la réciproque n'est pas vraie. On peut avoir $\nabla f(a) = 0$ et que a soit un point selle.

Exemple 7.28. $f(x, y) = xy + 4$.
Alors
$$\begin{cases} f_x = y \\ f_y = x \end{cases}$$
et donc $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$.
Mais le point $(0, 0)$ n'est pas un extremum local.
En effet, sur la droite $y = x$, on a
$$f(x, y) = f(x, x) = x^2 + 4 \geqslant 4 = f(0, 0)\ .$$
Restreinte à cette droite, la fonction f a donc un minimum local en $(0, 0)$.

Mais sur la droite $y = -x$, on a

$$f(x, y) = f(x, -x) = -x^2 + 4 \leqslant 4\ .$$

Restreinte à cette droite, la fonction f a donc un maximum local en $(0, 0)$.

Le point $(0, 0)$ est un point selle.

Définition 7.29 (Point selle)**.** Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ et $a \in D$ un point stationnaire (i.e. $\nabla f(a) = 0$). On dit que a est un **point selle de** f s'il existe deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ tels que

- la fonction $t \mapsto f(a + tu)$ admette un maximum local strict en $t = 0$ et
- la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ admette un minimum local strict en $t = 0$.

Rappel : soit $f(x) \in C^2(I, \mathbb{R})$ une fonction à 1 variable et a un point stationnaire (i.e. $f'(a) = 0$). Alors

- si $f''(a) > 0$, le point a est un minimum strict ;
- si $f''(a) < 0$, le point a est un maximum strict ;
- si $f''(a) = 0$ on ne peut rien dire, il faut regarder $f^{(3)}(a)$ puis $f^{(4)}(a)$ etc ...

Nous allons établir un résultat analogue pour les fonctions à n variables faisant intervenir la matrice hessienne $H_f(a)$.

Matrices et formes quadratiques

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n symétrique $(a_{ij} = a_{ji})$. L'application

$$q_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$q_A(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^T A \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

est appelée la **forme quadratique associée à** A.

Exemples 7.30.

1) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

définit la forme quadratique

$$q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2xy + 2yx + 7y^2 = x^2 + 4xy + 7y^2.$$

2) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

définit la forme quadratique

$$q(x,y,z) = 12x^2 + 2xy - 3xz + 2yx - 4y^2 - 3zx + 11z^2 = 12x^2 + 4xy - 6xz - 4y^2 + 11z^2.$$

3) La matrice identité I_n définit la forme quadratique

$$q(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^T\mathrm{x} = \|\mathrm{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

4) La matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

définit la forme quadratique

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

En particulier $q(e_i) = q(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) = \lambda_i$.

Application : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ donne la forme quadratique

$$q(x,y) = x^2 - 2y^2$$

donc $q(1,0) = 1$ et $q(0,1) = -2 < 0$

Propriétés : pour toute forme quadratique $q(\mathrm{x})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{q(\lambda\mathrm{x}) = \lambda^2 q(\mathrm{x})}$$

(d'où le nom de quadratique).

Définition 7.31. Une forme quadratique q est dite

(1) **définie positive** si $q(\mathrm{x}) > 0$ pour tout $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ non nul ;

(2) **définie négative** si $q(\mathrm{x}) < 0$ pour tout $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ non nul ;

(3) **indéfinie** s'il existe $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ avec $q(\mathrm{x}) < 0$ et $q(\mathrm{y}) > 0$.

Une matrice symétrique A est dite définie positive (définie négative, etc..) si la forme quadratique associée q_A est définie positive (définie négative, etc...)

Liens avec les valeurs propres

Comme A est symétrique, elle est diagonalisable :

$$A = PDP^{-1}$$

avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Les λ_i sont les valeurs propres de A. De plus, P est une matrice orthogonale : $P^{-1} = P^T$.

Proposition 7.32. *Soit A, P et D comme ci-dessus. Alors A est définie positive (resp. définie négative, indéfinie) si et seulement si D est définie positive (resp. définie négative, indéfinie). En d'autres termes, la diagonalisation ne change pas la signature de la matrice.*

Démonstration : Comme P est inversible (bijective), à tout $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$, on peut associer un et un seul $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ en posant

$$\mathrm{y} = P^{-1}\mathrm{x} = P^T\mathrm{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{x} = P\mathrm{y}.$$

Alors

$$q_A(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^T A\mathrm{x} = \mathrm{x}^T PDP^{-1}\mathrm{x} = \mathrm{x}^T PD\mathrm{y} = (P^T\mathrm{x})^T D\mathrm{y} = \mathrm{y}^T D\mathrm{y} = q_D(\mathrm{y})$$

Ainsi

$$q_A(\mathrm{x}) > 0 \quad \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad q_A(\mathrm{y}) > 0 \quad \forall \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n\,.$$

Ceci montre que q_A est définie positive si et seulement si q_D l'est. La démonstration est la même dans le cas d'une matrice définie négative ou indéfinie. □

Remarque 7.33. L'exemple 4) ci-dessous montre de plus qu'une matrice diagonale D est définie positive si et seulement si $\lambda_i > 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$.
De même D est définie négative si et seulement si $\lambda_i < 0$ pour tout i.
Et finalement D est indéfinie si et seulement s'il existe un $\lambda_i < 0$ et un $\lambda_j > 0$ (car alors $q(e_i) = \lambda_i < 0$ et $q(e_j) = \lambda_j > 0$).

Cette remarque et la proposition précédente implique le résultat suivant :

Théorème 7.34. *Une matrice A symétrique est*
(1) définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont > 0
(2) définie négative si et seulement si toutes ses valeurs propres sont < 0
(3) indéfinie si et seulement s'il existe $\lambda_i < 0$ et $\lambda_j > 0$.

Exemple : soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\lambda_1\lambda_2 = \det(A) = 7 - 4 = 3 > 0$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(A) = 8 > 0\,.$$

Donc les 2 valeurs propres sont positives et la matrice A est définie positive.

Plus généralement,

Théorème 7.35. *Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice 2×2 symétrique.*

(1) Si $\det(A) > 0$ et $\mathrm{Tr}(A) > 0$ alors $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ et la matrice A est définie positive ;

(2) si $\det(A) > 0$ et $\mathrm{Tr}(A) < 0$ alors $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ et la matrice A est définie négative ;

(3) si $\det(A) < 0$ alors $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$ et la matrice A est indéfinie.

Application aux extremum

Soit $f(\mathrm{x})$ une fonctions à n variables et a un point stationnaire (i.e. $\nabla f(a) = 0$). Alors l'approximation de Taylor d'ordre 2 autour de a devient :

$$\begin{aligned} f(a+u) &= f(a) + \nabla f(a) \cdot u + \frac{1}{2}\, u^T \cdot H_f(a) \cdot u + r_2(u) \\ &\approx f(a) + \frac{1}{2}\, u^T \cdot H_f(a) \cdot u \end{aligned}$$

Ainsi proche de a, la fonction f se comporte comme

$$f(a+u) \approx f(a) + \frac{1}{2}\, q(u)$$

où $q(u)$ est la forme quadratique associée à $H_f(a)$:

$$q(u) = u^T \cdot H_f(a) \cdot u\ .$$

- Ainsi, si $q(u)$ est définie positive, alors $q(u) > 0$ pour tout u et donc

$$f(a+u) = f(a) + \frac{1}{2}\, q(u) > f(a)\,.$$

Le point a est alors un minimum local strict.
- Si $q(u)$ est définie négative, alors $q(u) < 0$ pour tout u et donc

$$f(a+u) = f(a) + \frac{1}{2}\, q(u) < f(a)\,.$$

Le point a est alors un maximum local strict.
- Si $q(u)$ est indéfinie, alors il existe u_1 avec $q(tu_1) = t^2 q(u_1) > 0$ et il existe u_2 avec $q(tu_2) = t^2 q(u_2) < 0$. Ceci implique que

$$\begin{aligned} f(a+tu_1) &= f(a) + q(tu_1) > f(a) && \text{pour tout } t \neq 0 \text{ et} \\ f(a+tu_2) &= f(a) + q(tu_2) < f(a) && \text{pour tout } t \neq 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que a est un point selle.

En résumé,

Théorème 7.36 (Classification des points stationnaires)**.** *Soit a un point stationnaire d'une fonction $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ et $H_f(a)$ la matrice hessienne de f en a.*

1. Si $H_f(a)$ est définie positive, alors a est un minimum strict ;

2. si $H_f(a)$ est définie négative, alors a est un maximum strict ;

3. si $H_f(a)$ est indéfinie, alors a est un point selle.

Dans les autres cas, on ne peut rien dire.

Dans le cas d'une fonction $f(x, y)$ à 2 variables, ce résultat devient

Théorème 7.37. *Soit a un point stationnaire d'une fonction $f(x,y)$ de classe C^2 et $H_f(a)$ sa matrice hessienne (matrice 2×2).*

1. Si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\mathrm{Tr}(H_f(a)) > 0$, alors a est un minimum strict ;

2. si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\mathrm{Tr}(H_f(a)) < 0$, alors a est un maximum strict ;

3. si $\det(H_f(a)) < 0$, alors a est un point selle.

Si $\det(H_f(a)) = 0$, on ne peut rien dire.

Exemples 7.38.

1. Reprenons l'exemple vu précédemment : $f(x,y) = xy + 4$ et $P(0,0)$.
   On a vu

$$\begin{cases} f_x = y \\ f_y = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f_{xx} = 0 = f_{yy} \\ f_{xy} = 1 = f_{yx} \end{cases} \Longrightarrow H_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = H_f(0,0)$$

   et donc $\det H_f(0,0) = -1 < 0$. Le point $(0,0)$ est un point selle. Conforme à ce que l'on avait déjà trouvé.

2. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 30$. Alors

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 \\ f_y = 6xy - 12 \end{cases}$$

   Les points stationnaires sont les solutions du système

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x = \frac{2}{y} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{y^2} + y^2 = 5 \\ x = \frac{2}{y} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y^4 - 5y^2 + 4 = 0 \\ x = \frac{2}{y} \end{cases}$$

   ce qui donne $y^2 = 4$ ou $y^2 = 1$. Les points stationnaires sont donc

$$P_1(1,2) \qquad P_2(-1,-2) \qquad P_3(2,1) \qquad P_4(-2,-1)$$

   Calculons maintenant H_f :

$$\begin{cases} f_{xx} = 6x \\ f_{xy} = 6y = f_{yx} \\ f_{yy} = 6x \end{cases} \Longrightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

   - Point P_1 :

$$H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(H_f) = 36 - 144 < 0$$

     $\Longrightarrow P_1$ est un point selle.
   - Point P_2 :

$$H_f(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(H_f) = 36 - 144 < 0$$

     $\Longrightarrow P_2$ est un point selle.
   - Point P_3 :

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(H_f) = 144 - 36 > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(H_f) = 24 > 0$$

$\Longrightarrow P_3$ est un minimum local.

- Point P_4 :

$$H_f(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det(H_f) = 144-36 > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(H_f) = -24 < 0$$

$\Longrightarrow P_4$ est un maximum local.

3. Soit
$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2y - \frac{3}{2}x^2 + xyz - xz + 2x - y^2 + \frac{3}{2}y - z^2$$

(i) Vérifier que le point $P(1,\,1,\,0)$ est un point stationnaire.
(ii) Etudier sa nature.

(i)

$$\begin{aligned} f_x &= xy - 3x + yz - z + 2 && \Longrightarrow && f_x(1,\,1,\,0) = 0 \\ f_y &= \frac{1}{2}x^2 + xz - 2y + \frac{3}{2} && \Longrightarrow && f_y(1,\,1,\,0) = 0 \\ f_z &= xy - x - 2z && \Longrightarrow && f_z(1,\,1,\,0) = 0. \end{aligned}$$

On a bien $\nabla f(1,\,1,\,0) = \vec{0}$.

(ii)

$$\begin{array}{lll} f_{xx} = y - 3 & f_{yy} = -2 & f_{zz} = -2 \\ f_{xy} = x + z & f_{xz} = y - 1 & f_{yz} = x \end{array}$$

La matrice hessienne de f au point $P(1,\,1,\,0)$ vaut alors

$$H_f(1,\,1,\,0) = \begin{pmatrix} y-3 & x+z & y-1 \\ x+z & -2 & x \\ y-1 & x & -2 \end{pmatrix}\Bigg|_{P(1,\,1,\,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} =: A$$

Il faut calculer les valeur propres de A :

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_3 - A) = 0 \quad & \Longleftrightarrow \\ \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0 \quad & \Longleftrightarrow \text{(Sarus)} \\ (\lambda+2)^3 - (\lambda+2) - (\lambda+2) = 0 \quad & \Longleftrightarrow \\ \lambda^3 + 6\lambda^2 + 10\lambda + 4 = 0 & \end{aligned}$$

$\lambda_1 = -2$ est une solution et par factorisation, on obtient

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 10\lambda + 4 = (\lambda+2)(\lambda^2 + 4\lambda + 2) = 0$$

$\Longrightarrow \lambda_{2,3} = -2 \pm \sqrt{2}$.
Les 3 valeurs propres étant < 0, le point $P(1,\,1,\,0)$ est un maximum local.

7.6 Théorème des fonctions implicites

7.6.1 Exemple

Soit $F(x, y)$ une fonction à 2 variables. Considérons la courbe de niveau 0

$$\gamma = N_F(0) = \{(x, y) \,|\, F(x, y) = 0\}.$$

1) On peut essayer de résoudre l'équation $F(x, y) = 0$ en fonction de y pour établir $y = f(x)$. Si on peut le faire, alors la courbe γ est le graphe de la fonction $y = f(x)$ et on a

$$F(x, f(x)) = 0.$$

En dérivant cette dernière égalité par rapport à x, on trouve

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0$$

ce qui donne

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

Exemple : soit

$$F(x, y) = x^2 + e^y + 2x = 0.$$

Alors

$$y = f(x) = \ln(-x^2 - 2x)$$

pour $x \in]-2; 0[$.
Calcul direct : $y' = f'(x) = \dfrac{-2x - 2}{-x^2 - 2x}$.
Calcul implicite : $F_x = 2x + 2$ et $F_y = e^y$. Alors

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x + 2}{e^y} = -\frac{2x + 2}{-x^2 - 2x}.$$

2) Dans le cas général, il n'est pas possible de calculer $y = f(x)$. Mais, si l'on suppose que localement - sur un ouvert contenant $P(x_0, y_0)$ - il existe $y = y(x)$ alors on a vu au chapitre 4 qu'on peut dériver la relation $F(x, y) = 0$ par rapport à x (dérivée droite) pour trouver $y'\big|_P$. Ceci donne

$$F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0) \cdot y'(x_0, y_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y'\big|_P = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}}$$

La formule est la même que précédemment.

Exemple : soit

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$$

le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 5. Alors

$$\begin{cases} F_x = 2x \\ F_y = 2y \end{cases}$$

On obtient ainsi

$$y'\big|_P = -\frac{2x_0}{2y_0} = -\frac{x_0}{y_0} \qquad \text{pour } P(x_0, y_0)$$

Sans calculer explicitement $y = y(x)$ on peut donc trouver la dérivée $y'(x_0)$ en tout point (x_0, y_0). L'équation de la tangente à γ au point $P(x_0, y_0)$ est alors

$$y = y'\big|_P \cdot (x - x_0) + y_0 = -\frac{F_x\big|_P}{F_y\big|_P} \cdot (x - x_0) + y_0$$

ce qui donne

$$\text{Equation de la tangente en } P : \quad \boxed{F_x\big|_P \cdot (x - x_0) + F_y\big|_P \cdot (y - y_0) = 0}$$

Exemple précédent : la tangente au cercle $x^2 + y^2 - 25 = 0$ au point $P(3, 4)$ est

$$F_x(3, 4) \cdot (x - 3) + F_y(3, 4) \cdot (y - 4) = 0$$

ce qui donne

$$6 \cdot (x - 3) + 8 \cdot (y - 4) = 0.$$

7.6.2 Théorème général

Soit

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

une équation à n variables.
Les résultats précédents se généralisent de la façon suivante.

Premièrement, le théorème suivant affirme que, localement, et sous certaines hypothèses, il est possible de résoudre l'équation en fonction d'une variable, par exemple $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Secondement, il affirme que les dérivées partielles de $f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ se calculent à partir des dérivées partielles F_{x_i} comme précédemment.

Théorème 7.39 (Théorème des fonctions implicites)**.** *Soit*

- *$D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert,*
- *$F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et*
- *$a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ un point satisfaisant $F(a) = 0$.*
- *On suppose que $F_{x_n}(a) \neq 0$.*

Posons $\hat{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.
Alors il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ contenant $\hat{a}$ et une fonction à $n-1$ variables $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :

1. *le graphe de f est contenu dans D :*

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1})) \in D \qquad \text{pour tout } (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U.$$

2. *$f(a_1, \ldots, a_{n-1}) = a_n$*
3. *$F(x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0$ pour tout $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U$*
4. *la fonction f est de classe C^1 et*

$$f_{x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_{x_n}} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$$

Remarque 7.40. La condition $F_{x_n}(a) \neq 0$ est essentielle. Cependant si $F_{x_n}(a) = 0$ mais que $F_{x_k}(a) \neq 0$ pour un certain $k \neq n$, alors le résultat est vrai pour x_k c'est-à-dire qu'il existe une fonction f avec

$$x_k = f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n)$$

On explicite x_k au lieu de x_n.

En revanche, si $F_{x_i}(a) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ (le point a est un point stationnaire), le théorème n'est plus vrai et il est impossible d'expliciter une variable x_i en fonction des autres.

7.6.3 Application : équation du plan tangent à une surface implicite

Considérons la surface Γ définie par l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

et un point $P(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$, i.e. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Supposons de plus que $F_z\big|_P \neq 0$.
Alors, par le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction

$$z = f(x, y)$$

décrivant la surface Γ au voisinage de P. En particulier $f(x_0, y_0) = z_0$.
L'approximation du 1er ordre de cette fonction f donne l'équation du plan tangent :

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = f(P) + f_x(P) \cdot (x - x_0) + f_y(P) \cdot (y - y_0)$$

Or le théorème des fonctions implicites donne f_x et f_y :

$$f_x(P) = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)} \qquad \text{et} \qquad f_y(P) = -\frac{F_y(P)}{F_z(P)}$$

L'équation du plan tangent devient :

$$z = f(P) - \frac{F_x(P)}{F_z(P)} \cdot (x - x_0) - \frac{F_y(P)}{F_z(P)} \cdot (y - y_0)$$

qui s'écrit encore

$$\boxed{F_x(P) \cdot (x - x_0) + F_y(P) \cdot (y - y_0) + F_z(P) \cdot (z - z_0) = 0.}$$

Ceci montre que le vecteur normal au plan tangent et donc à la surface Γ est

$$n = \begin{pmatrix} F_x(P) & F_y(P) & F_z(P) \end{pmatrix} = \nabla F(P)$$

Le gradient ∇F est donc bien orthogonal à la surface de niveau $N_F(0) = \Gamma$.

De manière générale si une hyper-surface Γ est donnée par l'équation

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

alors l'équation de l'hyper-plan tangent à Γ passant par $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \Gamma$ est

$$\boxed{F_{x_1}(a) \cdot (x_1 - a_1) + F_{x_2}(a) \cdot (x_2 - a_2) + \cdots + F_{x_n}(a) \cdot (x_n - a_n) = 0}$$

qui s'écrit aussi

$$\nabla F(a) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} = 0$$

Exemples 7.41.
1. Considérons l'ellipsoïde

$$\Gamma : F(x, y, z) = 3x^2 + 6y^2 + z^2 - 36 = 0.$$

Alors

$$\begin{cases} F_x = 6x \\ F_y = 12y \\ F_z = 2z \end{cases}$$

et l'équation du plan tangent au point $P(1, 2, 3) \in \Gamma$ est

$$\begin{aligned} F_x(1,2,3) \cdot (x-1) + F_y(1,2,3) \cdot (y-2) + F_z(1,2,3) \cdot (z-3) = 0 \quad &\iff \\ 6(x-1) + 24(y-2) + 6(z-3) = 0 \quad &\iff \\ 6x + 24y + 6z = 72. \end{aligned}$$

2. Considérons la surface

$$(\Gamma) : \quad xyz = 1$$

et le point $P(2, \frac{1}{6}, 3) \in \Gamma$. Alors, en notant $F(x, y, z) = xyz - 1$, on a

$$\begin{cases} F_x = yz \\ F_y = xz \\ F_z = xy \end{cases} \implies \begin{cases} F_x(P) = \frac{1}{2} \\ F_y(P) = 6 \\ F_z(P) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

L'équation du plan tangent à Γ par P est alors

$$\frac{1}{2} \cdot (x - 2) + 6 \cdot \left(y - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3} \cdot (z - 3) = 0.$$

7.7 Extremum sous contraintes : multiplicateur de Lagrange

7.7.1 Multiplicateur de Lagrange

On désire trouver le maximum (ou minimum) d'une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ sur un domaine D avec la contrainte $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$. On suppose que $\nabla g(\mathrm{x}) \neq 0$ sur D.

<u>1ère méthode</u> : si l'on peut expliciter

$$x_n = \tilde{g}(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

alors

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \tilde{g}(x_1, \ldots, x_{n-1})) = \Phi(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

et on cherche les extremums de Φ.

2ème méthode : si l'on peut trouver une paramétrisation de la courbe $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ de la forme

$$(\gamma) : \quad \begin{cases} x_1 &= x_1(t) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(t) \end{cases}$$

alors $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \Phi(t)$ et on cherche les extremums de Φ.

3ème méthode : si aucune des 2 méthodes ne marche, on utilise un **multiplicateur de Lagrange**.

Cette méthode consiste à résoudre le système d'équations en $\mathrm{x} \in D$:

$$\boxed{\begin{cases} \nabla f(\mathrm{x}) + \lambda \nabla g(\mathrm{x}) = 0 \\ g(\mathrm{x}) = 0 \end{cases}}$$

C'est un système à $n+1$ inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda$ et à $n+1$ équations.

Cette méthode est basée sur le théorème suivant :

Théorème 7.42. *Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f, g \in C^1(D, \mathbb{R})$ et $M = \{\mathrm{x} \in D \,|\, g(\mathrm{x}) = 0\}$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in M$ un extremum local de la fonction $f\big|_M$. On suppose de plus que $\nabla g(a) \neq 0$. Alors il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\nabla f(a) + \lambda \nabla g(a) = 0.$$

Autrement dit, $\nabla f(a)$ et $\nabla g(a)$ sont colinéaires.
λ est appelé un multiplicateur de Lagrange.

Démonstration : On peut supposer $\dfrac{\partial g}{\partial x_n}(a) \neq 0$. Alors par le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction $\Phi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ dans un voisinage $U = B(\tilde{a}, r)$ de $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ telle que

$$\begin{cases} \Phi(a_1, \cdots, a_{n-1}) = a_n \\ g(x_1, \ldots, x_{n-1}, \Phi(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0 \qquad \forall \mathrm{x} \in U \end{cases}$$

avec

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\tilde{a}) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)} \qquad \text{pour tout } i = 1, \ldots, n-1$$

Posons alors

$$F(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \Phi(x_1, \ldots, x_{n-1})).$$

Alors, par hypothèse, la fonction F (qui est $f\big|_M$) admet un extremum en $\tilde{a}$. On a donc $\nabla F(\tilde{a}) = 0$ ce qui donne, avec la règle de composition :

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{a}) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\tilde{a}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot \left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)} \right) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) \qquad \text{pour tout } i = 1, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

En posant $\lambda = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)}$, on obtient

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) \qquad \text{pour tout } i = 1, \ldots, n-1, n$$

et donc $\nabla f(a) + \lambda \nabla g(a) = 0$.

□

ATTENTION : $\nabla f(a) + \lambda g(a) = 0$ est une condition nécessaire mais pas suffisante. Il faut donc vérifier que la solution cherchée est bien un extremum.

Exemples 7.43.
1) Trouver le maximum et le minimum de la fonction

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$$

sur le bord de l'ellipse $x^2 + 4y^2 = 1$.
Solution : la condition est $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1 = 0$. Alors

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ 8y + 2 \end{pmatrix}^T \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}^T$$

et le système à résoudre est alors

$$\begin{cases} 2x - 1 + \lambda 2x & = 0 \\ 8y + 2 + \lambda 8y & = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 1 & = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} 2(\lambda + 1)x & = & -1 & (I) \\ 4(1 + \lambda)y & = & -1 & (II) \\ x^2 + 4y^2 & = & 1 & \end{cases}$$

En élevant au carré et en additionnant les équations (I) et (II), on trouve

$$\begin{cases} 4(\lambda + 1)^2(x^2 + 4y^2) & = 2 \\ x^2 + 4y^2 & = 1 \end{cases}$$

ce qui donne

$$4(\lambda + 1)^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda + 1 = \pm\sqrt{1/2} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

On trouve alors 2 points :

$$P(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}) \qquad \text{et} \qquad Q(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}).$$

Un calcul montre que P est le minimum et Q le maximum.

2) Construire une boite de forme parallélépipèdique sans couvercle, de volume donné V de telle sorte que la surface du fond et des parois soit minimale.

La fonction à minimiser est

$$A = f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

et la contrainte est

$$g(x, y, z) = xyz - V = 0.$$

Le système à résoudre $\nabla f(x, y, z) + \lambda \nabla g(x, y, z) = 0$ devient

$$\left\{ \begin{array}{lcrr} y + 2z + \lambda yz & = & 0 & (I) \\ x + 2z + \lambda xz & = & 0 & (II) \\ 2x + 2y + \lambda xy & = & 0 & (III) \\ xyz & = & V & (IV) \end{array} \right.$$

$(I) \cdot x - (II) \cdot y$ donne $2xz - 2yz = 0$ et donc $x = y$.
Le système (partiel) devient :

$$\left\{ \begin{array}{lcrr} x + 2z + \lambda xz & = & 0 & (II) \\ 4 + \lambda x & = & 0 & (III) \\ x^2 z & = & V & (IV) \end{array} \right.$$

$(II) - (III) \cdot z$ donne $x - 2z = 0$ donc $x = 2z$. Finalement (IV) devient $4z^3 = V$ ce qui donne

$$z = \sqrt[3]{\frac{V}{4}} \qquad x = y = 2z = \sqrt[3]{2V}.$$

7.7.2 Contraintes multiples

Pour trouver les extremums d'une fonction $f(\mathrm{x})$ avec m contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(\mathrm{x}) = 0 \\ g_2(\mathrm{x}) = 0 \\ \vdots \\ g_m(\mathrm{x}) = 0 \end{array} \right.$$

on résoud le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla f(\mathrm{x}) + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(\mathrm{x}) & = & 0 \\ g_1(\mathrm{x}) & = & 0 \\ & \vdots & \\ g_m(\mathrm{x}) & = & 0 \end{array} \right.$$

C'est un système à $n + m$ inconnues : $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ et $n + m$ équations.

Exemple : trouvons le maximum de la fonction

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

avec les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ g_2(x, y, z) = x + z - 1 \end{array} \right.$$

Géométriquement $g_1(x, y, z) = 0$ est l'équation d'un cylindre vertical et $g_2(x, y, z) = 0$ celle d'un plan. Leur intersection est une ellipse Γ. On cherche donc le maximum de f sur l'ellipse

Γ.

Comme

$$\nabla f(x,y,z) = (1 \quad 1 \quad 1) \qquad \nabla g_1(x,y,z) = (2x \quad 2y \quad 0) \qquad \nabla g_2(x,y,z) = (1 \quad 0 \quad 1)\,,$$

il faut résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{lcll} 1+\lambda_1 2x+\lambda_2 & = & 0 & (I) \\ 1+\lambda_1 2y & = & 0 & (II) \\ 1+\lambda_2 & = & 0 & (III) \\ x^2+y^2 & = & 2 & (IV) \\ x+z & = & 1 & (V) \end{array} \right.$$

On voit que $\lambda_2 = -1$ par (III) et donc $x = 0$ ce qui donne $y = \pm\sqrt{2}$ et $z = 1$. On obtient 2 points

$$P(0,\sqrt{2},1) \qquad \text{et} \qquad Q(0,-\sqrt{2},1).$$

Comme $f(P) = 1+\sqrt{2}$ et $f(Q) = 1-\sqrt{2}$, on en déduit que P est le maximum cherché.

7.8 Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

7.8.1 Gradient

Dans cette section, nous allons étudier les fonctions

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

En physique, ces fonctions sont appelées **champs vectoriels**.
A tout point x $= (x_1,\ldots,x_n) \in D$, on associe un vecteur

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ f_2(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix}$$

La fonction $f_k : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est la **i-ème composante de** f.
L'image d'un point x sera vue comme un vecteur-colonne.

Définition-Proposition 7.44. Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction.
La fonction f est continue (resp. dérivable, resp. de classe C^1) si toutes ses composantes $f_k : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues (resp. dérivables, resp. de classe C^1).

Exemples 7.45.
1. Si $n = 1$, on retrouve les courbes déjà étudiées $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

2. Si $m = 1$, on retrouve les fonctions réelles à plusieurs variables $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

3. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y \\ 2x + \sin y \end{pmatrix}$$

est continue et de classe C^1 sur tout $\mathbb{R}^2$.

4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = x^2 + 5xy - 4x.$$

Alors le gradient de f définit un champ vectoriel

$$\begin{aligned} \nabla f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \begin{pmatrix} 2x + 5y - 4 \\ 5x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Définition 7.46. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction dérivable et $\mathrm{x} \in D$. La matrice $m \times n$

$$\nabla f(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathrm{x}) \\ \nabla f_2(\mathrm{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathrm{x}) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathrm{x}) \right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

est appelée le **gradient de f en** x ou également la **matrice jacobienne de** f.

Remarques :
1. si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ($m = 1$), la matrice est un vecteur-ligne et on retrouve le gradient définit dans la section 7.4.1.
2. Dans le cas d'une courbe

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on a alors $n = 1$ et le gradient de γ est un vecteur-colonne qui n'est rien d'autre que le vecteur tangent :

$$\nabla \gamma(t) = \dot{\gamma}(t).$$

Exemples 7.47.
1. Considérons la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y + 2yz + \sin x \\ xyz + 2x \end{pmatrix}$$

Le gradient de f en (x,y,z) est une matrice 2×3 :

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy + \cos x & x^2 + 2z & 2y \\ yz + 2 & xz & xy \end{pmatrix}.$$

2. Le gardient de la fonction identité $Id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est la matrice identité I_n.

Règle de composition

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^l$ deux fonctions de classe C^1. Supposons que $f(D) \subset U$. Alors la fonction composée

$$g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}^l$$

est de classe C^1 et son gradient est donné par

$$\underbrace{\nabla(g \circ f)(a)}_{l \times n} = \underbrace{\nabla g(f(a))}_{l \times m} \cdot \underbrace{\nabla f(a)}_{m \times n} \qquad \text{pour tout } a \in D.$$

Cette formule s'écrit aussi

$$\boxed{\nabla(g \circ f) = [\nabla g \ \circ f] \cdot \nabla f.}$$

Remarques

1. Si $m = n = l = 1$ on retrouve la règle $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
2. Si $n = 1$ (f est une courbe) et $l = 1$ (g est une fonction réelle), on retrouve la règle déjà vue
$$(g \circ f)'(t) = \nabla g(f(t)) \cdot \underbrace{\dot{f}(t)}_{= \nabla f(t)} .$$
3. Dans le cas $l = 1$, on peut réécrire la règle précédente comme suit :
soit $g(x_1, \ldots, x_m)$ une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. Posons
$$\begin{cases} x_1 = f_1(u_1, \ldots, u_n) \\ x_2 = f_2(u_1, \ldots, u_n) \\ \vdots \\ x_m = f_m(u_1, \ldots, u_n) \end{cases}$$
Si l'on note x $= f(u)$, alors la formule précédente s'écrit
$$\Big(D_{u_1}(g \circ f) \ \ D_{u_2}(g \circ f) \ \cdots D_{u_n}(g \circ f) \Big)$$
$$= (D_{x_1}g \ \ D_{x_2}g \ \cdots \ D_{x_m}g) \cdot \begin{pmatrix} D_{u_1}f_1 & D_{u_2}f_1 & \cdots & D_{u_n}f_1 \\ D_{u_1}f_2 & D_{u_2}f_2 & \cdots & D_{u_n}f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{u_1}f_m & D_{u_2}f_m & \cdots & D_{u_n}f_m \end{pmatrix}$$

ce qui donne pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g \circ f}{\partial u_i}(u) &= \frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathrm{x}) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_i}(u) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\mathrm{x}) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u_i}(u) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_m}(\mathrm{x}) \cdot \frac{\partial x_m}{\partial u_i}(u) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_k}(f(u)) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial u_i}(u)\end{aligned}$$

Notation physique

Si

$$L = L(x, y, z) \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = x(u, t) \\ y = y(u, t) \\ z = z(u, t) \end{cases}$$

on notera, par abus :

$$\frac{\partial L}{\partial u} = L_u = L_x \cdot x_u + L_y \cdot y_u + L_z \cdot z_u$$

et

$$L_t = L_x \cdot x_t + L_y \cdot y_t + L_z \cdot z_t$$

Fonction inverse et gradient

Soit

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

une fonction bijective et $h^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sa fonction réciproque. On suppose que h et h^{-1} sont dérivables. Alors, comme $h \circ h^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, la règle de composition donne

$$\nabla h(h^{-1}(y)) \cdot \nabla h^{-1}(y) = I_n$$

ou encore

$$\nabla h^{-1}(y) = \left[\nabla h(h^{-1}(y))\right]^{-1}$$

Le gradient de h^{-1} est l'inverse du gradient de h.

Exemple : soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$h(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix}$$

C'est la transformation entre coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires. Alors en se restreignant à un ouvert D avec $\rho > 0$ (par exemple $\varphi \in]0, \pi/2[$), la fonction h est bijective. Son inverse est donné par

$$h^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix}$$

On a

$$\nabla h = \begin{pmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix}$$

et

$$\nabla h^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_x & \rho_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Si on écrit ∇h^{-1} en fonction de ρ et φ, on obtient

$$\nabla h^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\rho} & \frac{y}{\rho} \\ -\frac{y}{\rho^2} & \frac{x}{\rho^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{\rho} & \frac{\cos\varphi}{\rho} \end{pmatrix}$$

et on vérifie que c'est bien la matrice inverse de ∇h.

7.8.2 Application : changement de coordonnées

Coordonnées polaires

Soient

$$\begin{cases} x = x(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi \\ y = y(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

Considérons la fonction $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$h(\rho,\varphi) = (x(\rho,\varphi), y(\rho,\varphi)).$$

La fonction h décrit le changement entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes. Son gradient est

$$\nabla h = \begin{pmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Soit $f(x,y)$ une fonction réelle à 2 variables.
Posons

$$\tilde{f}(\rho,\varphi) = f(h(\rho,\varphi)) = f(x(\rho,\varphi), y(\rho,\varphi)).$$

C'est la fonction f exprimée en coordonnées polaires. Parfois, par abus de langage, on identifie f et $\tilde{f}$.
On définit également

$$\tilde{f}_x(\rho,\varphi) = f_x(x(\rho,\varphi), y(\rho,\varphi))$$

C'est la dérivée partielle de f selon x mais exprimée en coordonnées polaires. De même, on pose $\tilde{f}_y = f_y \circ h$ ce qui se résume par

$$\nabla_{x,y}\tilde{f} = (\tilde{f}_x \quad \tilde{f}_y) = \nabla f \ \circ h.$$

(c'est le gradient de f selon x et y mais exprimé en fonction de ρ et φ).
On notera $\nabla_{\rho,\varphi}\tilde{f}$ au lieu de $\nabla\tilde{f}$ pour plus de clarté.
Avec ces notations la règle de composition

$$\nabla\tilde{f} = [\nabla f \ \circ h] \ \cdot \nabla h = \nabla_{x,y}\tilde{f} \cdot \nabla h$$

devient

$$\boxed{\nabla_{\rho,\varphi}\tilde{f} = \nabla_{x,y}\tilde{f} \cdot \nabla h}$$

qui donne

$$(\tilde{f}_\rho \quad \tilde{f}_\varphi) = (\tilde{f}_x \ \ \tilde{f}_y) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}}_{=\nabla h}$$

La matrice ∇h est inversible si $\rho \neq 0$, car $\det(\nabla h) = \rho$. En multipliant à droite par ∇h^{-1}, on obtient

$$\begin{aligned}(\tilde{f}_x \quad \tilde{f}_y) &= (\tilde{f}_\rho \quad \tilde{f}_\varphi) \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cdot\tilde{f}_\rho - \tilde{f}\frac{1}{\rho}\sin(\varphi)\cdot\tilde{f}_\varphi & \sin(\varphi)\cdot\tilde{f}_\rho + \frac{1}{\rho}\cos(\varphi)\cdot\tilde{f}_\varphi \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{f}_x &= \cos\varphi\cdot\tilde{f}_\rho - \tfrac{1}{\rho}\sin\varphi\cdot\tilde{f}_\varphi \\ \tilde{f}_y &= \sin\varphi\cdot\tilde{f}_\rho + \tfrac{1}{\rho}\cos\varphi\cdot\tilde{f}_\varphi\end{aligned}} \tag{7.4}$$

Ces 2 formules permettent donc de calculer les dérivées partielles selon x et y d'une fonction donnée en coordonnées polaires.

Exemple 7.48. Considérons la fonction $\tilde{f}(\rho, \varphi) = 2\rho^2$ en coordonnées polaires. Calculons le gradient de $\tilde{f}$ selon x, y. On a
$\tilde{f}_\rho = 4\rho$ et $\tilde{f}_\varphi = 0$ ce qui donne, en appliquant la formule (7.4)

$$\begin{aligned}f_x = \tilde{f}_x &= \cos\varphi\cdot\tilde{f}_\rho - \frac{1}{\rho}\sin\varphi\cdot\tilde{f}_\varphi = \cos\varphi\cdot 4\rho - 0 = 4\rho\cos\varphi \\ f_y = \tilde{f}_y &= \sin\varphi\cdot\tilde{f}_\rho + \frac{1}{\rho}\cos\varphi\cdot\tilde{f}_\varphi = \sin\varphi\cdot 4\rho\end{aligned}$$

Le gradient est donc $4\rho\cdot(\cos\varphi \quad \sin\varphi)$.

Vérification par calcul direct :

$$f(x, y) = 2\rho^2 = 2(x^2 + y^2).$$

Alors $f_x = 4x = 4\rho\cos\varphi$ et $f_y = 4y = 4\rho\sin\varphi$.

Coordonnées cylindriques

Considérons le changement de coordonnées

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Ceci définit une fonction $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en posant $h(\rho, \varphi, z) = (x, y, z)$. Sa matrice jacobienne est

$$\nabla h = \begin{pmatrix} x_\rho & x_\varphi & x_z \\ y_\rho & y_\varphi & y_z \\ z_\rho & z_\varphi & z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(\nabla h) = \rho$. Ainsi si $\rho \neq 0$ la matrice ∇h est inversible :

$$\nabla h^{-1} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

Soit $f(x,y,z)$ une fonction à 3 variables et $\tilde{f}(\rho,\varphi,z)$ la fonction correspondante en coordonnées cylindriques. En posant comme précédemment

$$\nabla_{x,y,z}\tilde{f} = \nabla f \circ h$$

et en notant $\nabla_{\rho,\varphi,z}\tilde{f}$ au lieu de $\nabla\tilde{f}$, on obtient

$$\nabla\tilde{f} = [\nabla f \circ h]\cdot\nabla h = \nabla_{x,y,z}\tilde{f}\cdot\nabla h.$$

ou encore

$$\boxed{\nabla_{x,y,z}\tilde{f} = \nabla_{\rho,\varphi,z}\tilde{f}\cdot\nabla h^{-1}}$$

ce qui donne

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{f}_x = \tilde{f}_\rho\cos\varphi - \tilde{f}_\varphi\,\frac{1}{\rho}\,\sin\varphi \\ \tilde{f}_y = \tilde{f}_\rho\sin\varphi + \tilde{f}_\varphi\,\frac{1}{\rho}\,\cos\varphi \\ \tilde{f}_z = \tilde{f}_z \end{array}}$$

Coordonnées sphériques

Considérons le changement de coordonnées :

$$\begin{cases} x = r\ \cos\varphi\ \sin\theta \\ y = r\ \sin\varphi\ \sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad\qquad r>0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$

Ceci définit une fonction $h:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ en posant $h(r,\varphi,\theta)=(x,y,z)$. Sa matrice jacobienne est

$$\nabla h = \begin{pmatrix} x_r & x_\varphi & x_\theta \\ y_r & y_\varphi & y_\theta \\ z_r & z_\varphi & z_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\ \sin\theta & -r\sin\varphi\ \sin\theta & r\ \cos\varphi\ \cos\theta \\ \sin\varphi\ \sin\theta & r\cos\varphi\ \sin\theta & r\ \sin\varphi\ \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

On a $\det(\nabla h) = r^2\sin\theta$. Ainsi si $r\neq 0$ et $\theta\neq\pm\pi$, la matrice ∇h est inversible :

$$\nabla h^{-1} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

et on calcule, comme ci-dessus

$$\boxed{\nabla_{x,y,z}\tilde{f} = \nabla_{r,\varphi,\theta}\tilde{f}\cdot\nabla h^{-1}.}$$

Chapitre 8

Intégrales multiples

8.1 Intégrales doubles

8.1.1 Définition et interprétation géométrique

Soit D un domaine fermé de $\mathbb{R}^2$ et $f(x,y)$ une fonction continue sur D. On a envie de définir l'intégrale double

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

de telle manière qu'elle soit égale au volume compris entre la base D et la surface

$$S = \{(x,y,f(x,y)\,|\,(x,y) \in D\}.$$

Défintion analytique

On décompose D de façon quelconque en sous-domaines disjoints $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Soit ΔA_i l'aire de chaque D_i.

On choisit arbitrairement un point $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ et on calcule

$$\begin{aligned} \Delta V_i = f(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta A_i &= \text{volume du prisme de base } D_i \text{ et de hauteur } z_i = f(\xi_i,\eta_i) \\ &\approx \text{volume limité par } D_i \text{ et la surface } S_i \end{aligned}$$

On pose alors

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta A_i$$

Posons $\delta = \max\limits_i d_i$ avec d_i = diamètre du plus petit cercle contenant D_i. Alors, on définit

$$\iint_D f\,dA = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta \to 0}} V_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta A_i$$

et ceci indépendamment du choix des D_i, des ξ_i et des η_i.

On note aussi $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ au lieu de $\displaystyle\iint_D f\,dA$.
L'élément $dA = dxdy$ est l'élément différentiel de surface.

8.1.2 Propriétés de l'intégrale double

En utilisant les propriétés des limites, on démontre que :

1. $\displaystyle\iint_D (f+g)\,dA = \iint_D f\,dA + \iint_D g\,dA$
2. $\displaystyle\iint_D \alpha \cdot f\ dA = \alpha \cdot \iint_D f\ dA$
3. Si $D = D' \cup D''$ et $D' \cap D'' = \emptyset$ alors
$$\iint_D f\ dA = \iint_{D'} f\ dA + \iint_{D''} f\ dA$$
4. si $f \leqslant g$ sur D alors $\displaystyle\iint_D f\ dA \leqslant \iint_D g\ dA.$
5. si $f(x,y) = 1$ alors $\displaystyle\iint_D 1 \cdot dA = \text{Aire}(D)$

8.1.3 Calcul effectif

Sur un rectangle

Supposons que D soit un rectangle : $D = \{(x,y) \,|\, a \leqslant x \leqslant b\,,\, c \leqslant y \leqslant d\}$.

Soit $A(x)$ est l'aire de la section $PP'Q'Q$ avec x fixé $\in [a;b]$.

Alors

$$I = \iint_D f(x,y)\ dxdy = \int_a^b A(x)\ dx$$

Or pour $x = x_0$ fixé, on a $A(x_0) = \displaystyle\int_c^d f(x_0,\ y)\ dy$. Donc finalement

$$I = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right)\ dx.$$

On intègre donc d'abord selon y en considérant x comme un paramètre et ensuite selon x. Mais on peut faire l'inverse. On obtient donc aussi

$$I = \int_c^d \left(\underbrace{\int_a^b f(x,y)\ dx}_{=B(y)} \right)\ dy.$$

<u>Cas particulier</u> : si

$$f(x,y) = p(x)q(y)$$

alors

$$A(x) = \int_c^d p(x)q(y)\ dy = p(x) \cdot \int_c^d q(y)\ dy$$

et alors

$$I = \int_a^b \left(p(x) \int_c^d q(y)\, dy \right)\ dx = \int_a^b p(x)\, dx \cdot \int_c^d q(y)\, dy.$$

L'intégrale double, est dans ce cas le produit de 2 intégrales simples.

Cas général

Supposons que l'on peut trouver deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ définie entre x_1 et x_2 telles que

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [x_1; x_2]\ \ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}.$$

L'aire de la section située dans le plan vertical $x = x_0$ est alors égale à

$$A(x_0) = \int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(x_0, y)\ dy$$

et alors

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ dy \right) dx.$$

De façon analogue, on peut d'abord intégrer selon la variable x qui varie entre $\theta(y)$ et $\sigma(y)$ et ensuite selon y. On obtient

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{\theta(y)}^{\sigma(y)} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Remarque : En général, il faut décomposer D en plusieurs sous-domaines pour trouver $\phi(x)$ et $\psi(x)$.

Remarque : Le choix de l'ordre d'intégration ne change rien en théorie mais, en pratique, il est important. Un bon choix peut conduire à un petit nombre d'intégrales alors qu'un mauvais choix peut même amener à une intégrale impossible à calculer.

Exemples 8.1.

(1) Considérons la fonction $f(x,y) = x+y$ sur le domaine D ci-contre

Prenons $y = y_0$ fixé $\Longleftrightarrow$ on intègre d'abord selon x. Alors

$$A(y_0) = \int_{x=y_0}^{x=4-2y_0} (x+y_0)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + xy_0 \right) \Big|_{x=y_0}^{x=4-2y_0} = \cdots = 8 - 4y_0 - \frac{3}{2}y_0^2.$$

Donc

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_{y=0}^{y=1} \left(8 - 4y - \frac{3}{2}y^2\right) dy = \left(8y - 2y^2 - \frac{1}{2}y^3\right)\Big|_0^1 = \frac{11}{2}.$$

Si on intègre d'abord selon y et ensuite selon x, il faut calculer 3 intégrales :

$$\int_{x=0}^{x=1} \ldots\, dA + \int_{x=1}^{x=2} \ldots\, dA + \int_{x=2}^{x=4} \ldots\, dA.$$

(2) soit $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2} \cdot \sin^2 x$ sur le domaine
$D =$ triangle de sommets $O(0,0)$, $A(\pi,0)$ et $B(\pi,\pi)$.

Domaine D :

Intégration d'abord selon y :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{x=0}^{x=\pi}\left(\int_{y=0}^{y=x}\frac{y}{x^2}\sin^2 x\,dy\right)\,dx = \int_0^{\pi}\frac{1}{x^2}\sin^2 x\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{y=x}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Intégration d'abord selon y :

$$I = \int_{y=0}^{\pi}\left(\int_{x=y}^{x=\pi} y\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx\right)\,dy = \int_{y=0}^{\pi} y\cdot\left(\int_{x=y}^{x=\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx\right)\,dy = \dots$$

Impossible d'intégrer $\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$.

(3) $f(x,y) = 2xy$ sur le domaine $D =$ quart de cercle de rayon 1 et de centre $O(0,0)$.

$$\iint_D 2xy\,dA = \int_0^1\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} 2xy\,dy\,dx = \int_0^1 x\cdot\left[y^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 x(1-x^2)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

8.1.4 Applications

Centre de masse

(A) Corps ponctuels

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\overrightarrow{OP_i}$$

avec $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i =$ masse totale.

Le point G ne dépend pas de l'origine O choisie. En effet si on prend O', on obtient

$$\overrightarrow{O'G} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\overrightarrow{O'P_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot(\overrightarrow{O'O}\;+\;\overrightarrow{OP_i}) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\overrightarrow{O'O}\;+\;\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\overrightarrow{OP_i}$$
$$= \overrightarrow{O'O}\;+\;\overrightarrow{OG}.$$

(B) Cas général : soit D un domaine fini de masse spécifique $\mu(x, y)$.

Alors la masse m_i d'un très petit sous-domaine D_i est environ égale à

$$m_i = \mu(x, y) \cdot \Delta A_i$$

avec $\Delta A_i = \text{Aire}(D_i)$.
Masse totale :

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta A_i \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad M = \iint_D \mu(x, y)\, dA.$$

Pour le centre de masse, chaque D_i donne une contribution de

$$m_i \cdot \overrightarrow{OP_i} = \mu(P_i) \cdot \Delta A_i \cdot \overrightarrow{OP_i}.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \iint_D \mu(x, y) \cdot \overrightarrow{OP}\, dxdy \qquad \text{avec } \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En choisissant un système d'axes, et en notant (x_G, y_G) les coordonnées de G, on obtient

$$\boxed{x_G = \frac{1}{M} \iint_D x \cdot \mu(x, y)\, dxdy} \qquad \text{et} \qquad \boxed{y_G = \frac{1}{M} \iint_D y \cdot \mu(x, y)\, dxdy.} \tag{8.1}$$

Exemples 8.2.
1. Centre de masse d'un demi disque homogène ($\mu \equiv 1$) de rayon R.

Masse totale :

$$M = \iint_D 1\, dxdy = A = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Centre de masse : par symétrie, on a $x_G = 0$.

Pour y_G la formule 8.1 donne

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{1}{M}\iint_D y\ dxdy = \frac{2}{\pi R^2}\cdot\int_{x=-R}^{R}\int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} y\ dydx \\
&= \frac{2}{\pi R^2}\cdot\int_{x=-R}^{R}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx \\
&= \frac{2}{\pi R^2}\cdot\int_{x=-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\ dx \\
&= \frac{1}{\pi R^2}\cdot\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} \\
&= \frac{1}{\pi R^2}\cdot\left(2R^3-\frac{2}{3}R^3\right) = \frac{4}{3\pi}R.
\end{aligned}$$

2. Centre de masse d'un triangle homogène ($\mu \equiv 1$).
A l'aide d'une translation et d'une rotation, on peut toujours se ramener au cas suivant :

$$A(0,0),\quad B(x_B,y_B)\quad \text{et}\quad C(x_B,y_C).$$

Equation de la droite AB : $y = mx+h = \dfrac{y_B}{x_B}\cdot x$
Droite AC : $y = mx+h = \dfrac{y_C}{x_B}\cdot x$
Masse du triangle = aire du triangle = $A = \dfrac{1}{2}\,x_B\cdot(y_C-y_B)$
Alors

$$\begin{aligned}
\iint_\Delta x\ dxdy &= \int_{x=0}^{x_B}\left(\int_{\frac{y_B}{x_B}\cdot x}^{\frac{y_C}{x_B}\cdot x} x\ dy\right)dx = \int_{x=0}^{x_B} x\cdot\left(\frac{y_C}{x_B}\cdot x-\frac{y_B}{x_B}\cdot x\right) dx \\
&= \int_{x=0}^{x_B}\frac{y_C-y_B}{x_B}\,x^2\ dx = \frac{1}{3}\,\frac{y_C-y_B}{x_B}\,x_B^3 \\
&= \frac{1}{3}x_B^2(y_C-y_B)
\end{aligned}$$

et donc

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_\Delta x\ dxdy = \frac{2}{x_B(y_C-y_B)}\cdot\frac{1}{3}x_B^2(y_C-y_B) = \frac{2}{3}x_B = \frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C).$$

De même

$$\begin{aligned}
\iint_\Delta y\ dxdy &= \int_{x=0}^{x_B}\left(\int_{\frac{y_B}{x_B}\cdot x}^{\frac{y_C}{x_B}\cdot x} y\ dy\right)dx = \int_{x=0}^{x_B}\frac{1}{2}\,\left(\frac{y_C^2}{x_B^2}-\frac{y_B^2}{x_B^2}\right)\,x^2\ dx \\
&= \frac{1}{6}\,\left(\frac{y_C^2}{x_B^2}-\frac{y_B^2}{x_B^2}\right)\cdot x_B^3 = \frac{1}{6}\,x_B(y_C^2-y_B^2).
\end{aligned}$$

et donc

$$y_G = \frac{1}{A}\iint_\Delta y\,dxdy = \frac{2}{x_B(y_C-y_B)}\cdot\frac{1}{6}\,x_B(y_C^2-y_B^2) = \frac{1}{3}(y_B+y_C) = \frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C).$$

On a donc montré que dans un triangle ABC :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right).$$

Propriété du centre de masse : Soit $D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$ et G_i le centre de masse de D_i et m_i la masse de D_i. Alors G = barycentre des points G_i affectés des masses m_i :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}(m_1\cdot\overrightarrow{OG_1}+m_2\cdot\overrightarrow{OG_2}+\cdots+m_n\cdot\overrightarrow{OG_n})$$

Exemple : Centre de gravité du domaine D :

Rectangle 1 : $m_1 = 2bc$ et $x_{G_1} = 0$ $y_{G_1} = -\frac{c}{2}$

Rectangle 2 : $m_2 = 2ac$ et $x_{G_2} = 0$ $y_{G_2} = \frac{c}{2}$

Alors $x_G = 0$ et

$$y_G = \frac{1}{M}\left(m_1 y_{G_1} + m_2 y_{G_2}\right) = \frac{1}{2bc+2ac}(ac^2-bc^2) = -\frac{c}{2}\cdot\frac{b-a}{a+b}.$$

Théorème 8.3 (Théorème de Guldin)**.** *Soit D un domaine homogène du plan dont l'aire vaut A. Soit $G(x_G, y_G)$ le centre de gravité de D. Soit V le volume du corps de révolution engendré par rotation de D autour de l'axe Ox. Alors*

$$\boxed{V = 2\pi y_G\cdot A}$$

V = (circonférence du cercle décrit par G) $\times$ (aire de D)

Démonstration : On a vu au chapitre 5 que $V = \pi\int_a^b \left[g^2(x)-f^2(x)\right]\,dx$. Donc

$$y_G = \frac{1}{A}\iint_D y\,dxdy = \frac{1}{A}\int_a^b\left(\int_{f(x)}^{g(x)} y\,dy\right)dx = \frac{1}{A}\int_a^b\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{f(x)}^{g(x)}dx$$
$$= \frac{1}{2A}\int_a^b\left[g^2(x)-f^2(x)\right]\,dx = \frac{1}{2A}\cdot\frac{V}{\pi}.$$

Moment d'inertie

Corps ponctuel de masse m tournant à une distance r autour d'un axe. Alors

$$J = mr^2.$$

Corps étendu D de masse spécifique $\mu(x,y)$ (= masse par unité de surface).
Tournant autour de l'axe Ox :

$$J_x = \iint_D y^2 \mu(x,y)\; dxdy.$$

Tournant autour de l'axe Oy :

$$J_y = \iint_D x^2 \mu(x,y)\; dxdy.$$

Théorème 8.4 (Théorème de Steiner)**.** *Notons J_y^G le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à Oy et passant par le centre de gravité $G(x_G, y_G)$.*

Alors

$$J_y = J_y^G + Mx_G^2$$

où $M = \iint_D \mu(x,y)\; dxdy$ est la masse totale

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} J_y^G &= \iint_D (x-x_G)^2 \mu(x,y)\; dxdy = \iint_D \left[x^2 - 2xx_G + x_G^2\right] \cdot \mu(x,y)\; dxdy \\ &= \iint_D x^2 \mu(x,y)\; dxdy - 2x_G \iint_D x\mu(x,y)\; dxdy + x_G^2 \iint_D \mu(x,y)\; dxdy \\ &= J_y - 2x_G \cdot Mx_G + Mx_G^2 = J_y - Mx_G^2 \end{aligned}$$

□

8.1.5 Intégration sur tout $\mathbb{R}^2$

Soit $f(x,y)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Comment définir $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\; dxdy$?

(A) Cas d'une fonction positive : soit $f(x,y) \geqslant 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
Soit $\{D_n\}$ une suite de sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}^2$ satisfaisant les 2 propriétés suivantes :

(1) $D_n \subset D_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) Pour toute boule ouverte $B_r = B(O, r)$, il existe un $n_r \in \mathbb{N}$ avec $B_r \subset D_{n_r}$.
(Ceci implique que $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \mathbb{R}^2$.)

Posons alors

$$I_n = \iint_{D_n} f(x, y)\, dxdy.$$

• Si la limite $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$ existe, on définit

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x, y)\, dxdy.$$

On peut montrer que cette définition est bonne dans le sens qu'elle ne dépend pas du choix des D_n.

• Si $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x, y)\ dxdy = +\infty$, on dit que l'intégrale $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\ dxdy$ **diverge**.

Critère de comparaison : soient $0 \leqslant f(x, y) \leqslant g(x, y)$.

(i) Si $\iint_{\mathbb{R}^2} g\ dA$ converge alors $\iint_{\mathbb{R}^2} f\ dA$ converge aussi ;

(ii) Si $\iint_{\mathbb{R}^2} f\ dA$ diverge alors $\iint_{\mathbb{R}^2} g\ dA$ diverge aussi.

(B) Cas d'une fonction quelconque : si $f(x, y)$ est quelconque, on considère d'abord l'intégrale

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \big|f(x, y)\big|\ dxdy.$$

(1) Si cette intégrale converge on dit que $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\ dxdy$ est **absolument convergente**. Dans ce cas, on peut montrer que la limite

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x, y)\ dxdy$$

existe et est indépendante du choix des D_n.

(2) Dans le cas où $\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)|\ dxdy$ n'est pas convergente, on ne peut pas définir $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\ dxdy$ comme précédemment car cette limite dépend du choix des D_n.

Exemple : $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Soit D_n le carré de centre $(0,0)$ et de côté $2n$. Alors

$$\iint_{D_n} f(x,y)\; dxdy = \int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n} \left(x^2 - y^2\right)\; dx\; dy = \int_{-n}^{n} (\frac{2}{3}n^3 - 2y^2 n)\; dy = \frac{4}{3}n^4 - \frac{4}{3}n^4 = 0$$

et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\; dA = 0$.
Soit $D'_n = \{(x,y) \,|\, -2n < x < 2n,\; n < y < n\}$ le rectangle de centre $(0,0)$ et de côtés $2n$ et n. Alors

$$\begin{aligned}
\iint_{D'_n} f(x,y)\; dxdy &= \int_{-2n}^{2n}\int_{-n}^{n} \left(x^2 - y^2\right)\; dydx = \int_{-2n}^{2n} \left[x^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=-n}^{y=n} dx \\
&= \int_{-2n}^{2n} (2x^2 n - \frac{2}{3}n^3)\; dx = \left[\frac{2}{3}nx^3 - \frac{2}{3}n^3 x\right]_{-2n}^{2n} \\
&= \frac{32}{3}n^4 - \frac{8}{3}n^4 = 8n^4.
\end{aligned}$$

On a alors $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{D'_n} f(x,y)\; dA = +\infty$.

8.1.6 Changement de variables

Soit D un domaine défini dans le plan Oxy. Considérons un changement de variables $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ défini par

$$h(u,v) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

Alors

$$\nabla h(u,v) = \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{pmatrix}.$$

Le domaine D se transforme en un domaine $\tilde{D}$ dans le plan Ouv.

Considérons un petit rectangle situé dans $\tilde{D}$ et limité par les points

$$P(u,v), \qquad Q(u+\Delta u, v), \qquad R(u+\Delta u, v+\Delta v) \qquad \text{et} \qquad S(u, v+\Delta v).$$

Son aire est égale à $\Delta u \Delta v$. Calculons la surface ΔA correspondante dans D. Approximation du 1er ordre autour du point $P(u,v)$

$$\begin{aligned} h(u+\Delta u, v) &= h(u,v) + \nabla h(u,v) \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ 0 \end{pmatrix} + o(\Delta u) \\ &\approx h(u,v) + \begin{pmatrix} x_u(u,v)\cdot \Delta u \\ y_u(u,v)\cdot \Delta u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} h(u, v+\Delta v) &= h(u,v) + \nabla h(u,v) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta v \end{pmatrix} + o(\Delta v) \\ &\approx h(u,v) + \begin{pmatrix} x_v(u,v)\cdot \Delta v \\ y_v(u,v)\cdot \Delta v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors

$$\overrightarrow{a} = h(u+\Delta u, v) - h(u,v) \approx \begin{pmatrix} x_u \cdot \Delta u \\ y_u \cdot \Delta u \end{pmatrix}.$$

et

$$\overrightarrow{b} = h(u, v+\Delta v) - h(u,v) \approx \begin{pmatrix} x_v \cdot \Delta v \\ y_v \cdot \Delta v \end{pmatrix}.$$

L'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ vaut $\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\|$. Si $\Delta u, \Delta v \to 0$ alors

$$\begin{aligned} dxdy = dA &= \left\| \begin{pmatrix} x_u du \\ y_u du \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_v dv \\ y_v dv \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_u y_v - y_u x_v \end{pmatrix} dudv \right\| \\ &= |x_u y_v - x_v y_u| \cdot dudv = \left|\det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right| dudv = \left|\det \nabla h\right| dudv. \end{aligned}$$

Notation : le terme $|\det \nabla h| = \left|\det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right|$ est aussi noté $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$. C'est la valeur absolue du jacobien de h. On a ainsi démontré l'égalité

$$\boxed{dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.}$$

Lors d'un changement de variables donné par $h(u,v) = (x,y)$, il faut donc remplacer

- $dxdy$ par $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$
- D par $\tilde{D}$
- $f(x,y)$ par $\tilde{f}(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$.

Ainsi

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(u,v) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.}$$

Exemple 8.5. Soit $D = \Big\{(x,y) \mid x > 0, y > 0,\ 1 \leqslant xy \leqslant 4,\ 1 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 3\Big\}$.
Calculons
$$J = \iint_D (x^2+y^2)\, dxdy.$$

On pose $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy. \end{cases}$

- D devient $\tilde{D} = \big\{1 \leqslant u \leqslant 3\,,\ 2 \leqslant v \leqslant 8\big\} = [1;3] \times [2;8]$ (c'est un rectangle).
- $\Big|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Big| = \Big| \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \Big| = \Big| \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \Big| = 4(x^2+y^2)$. Donc

$$dudv = 4(x^2+y^2)dxdy.$$

L'intégrale devient

$$J = \iint_D (x^2+y^2)dxdy = \iint_{\tilde{D}} \frac{1}{4} dudv = \frac{1}{4}\int_1^3 du \cdot \int_2^8 dv = \frac{1}{4}\cdot 2 \cdot 6 = 3.$$

8.1.7 Application : coordonnées polaires

si $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ alors

$$\nabla h = \begin{pmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$$

et $\det(\nabla h) = \rho$. On a donc

$$\boxed{dx\,dy = \rho\; d\rho\, d\varphi}$$

Exemple : Soit D le demi-disque supérieur de centre $(1,0)$ et de rayon 1 et $f(x,y) = y$.
On veut calculer
$$I = \iint_D f(x,y)\, dxdy.$$
Coordonnées polaires :
- le domaine D devient $\rho \leqslant 2\cos\varphi$;
- la fonction f devient $\tilde{f}(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi$.

L'intégrale devient donc

$$I = \iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{2\cos\varphi} \rho\sin\varphi\; \rho\, d\rho d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{2\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi\; d\rho d\varphi$$
$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin(\varphi)\cdot \frac{1}{3}\rho^3\Big|_{\rho=0}^{\rho=2\cos\varphi} d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{8}{3}\sin(\varphi)\cdot\cos^3(\varphi)\, d\varphi = -\frac{2}{3}\cos^4\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

Intégration sur $\mathbb{R}^2$

En coordonnées polaires, l'intégrale sur tout $\mathbb{R}^2$ devient

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \lim_{R\to\infty}\int_{\rho=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\tilde{f}(\rho,\varphi)\,\rho\,d\varphi d\rho = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\tilde{f}(\rho,\varphi)\,\rho\,d\varphi d\rho$$

Application : calcul de l'intégrale d'erreur

On veut calculer $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.
Problème : e^{-x^2} ne possède pas de primitive analytique.

Solution : on calcule I^2 !!!

$$\begin{aligned}
I\cdot I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dxdy\\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \qquad \Big|\ \text{coordonnées polaires}\\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\rho e^{-\rho^2}\,d\rho\,d\varphi = 2\pi\cdot\Big[-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\Big]_0^{\infty} = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

Donc

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Conséquence : soit $p > 0$ et $q \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2+qx}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{p}x-\frac{q}{2\sqrt{p}})^2+\frac{q^2}{4p}}\,dx = e^{\frac{q^2}{4p}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\frac{1}{\sqrt{p}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{\frac{q^2}{4p}}.$$

En particulier, si $p = \pi$ et $q = 0$ on trouve une intégrale valant 1.
$f(x) = e^{-\pi x^2}$ est donc une densité de probabilité (appelée gaussienne).

8.2 Intégrales triples

8.2.1 Définition

La définition et les propriétés de l'intégrale triple sont analogues à celles de l'intégrale double. On note

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

l'intégrale de f sur le domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ borné.

Si $f(x,y,z) \equiv 1$, on a en particulier

$$\iint_D 1\,dxdydz = Vol(D).$$

8.2.2 Calcul effectif

Soit $\tilde{D}$ la projection orthogonale de D sur le plan Oxy. Alors

$$\begin{aligned}\iiint_D f(x,y,z)dV &= \iint_{\tilde{D}} \left(\int_{z=\sigma^-(x,y)}^{\sigma^+(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy \\ &= \int_{x=a}^{b} \int_{y=\phi(x)}^{\psi(x)} \int_{z=\sigma^-(x,y)}^{\sigma^+(x,y)} f(x,y,z)dz\; dy\; dx.\end{aligned}$$

Exemple 8.6.

- $D =$ tétraèdre de sommets $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;4)$ et $O(0;0;0)$.
- $f(x,y,z) = x$.

$\tilde{D} =$ triangle ABO
Equation de la droite AB : $y = -2x + 2$
Equation du plan ABC : $z = -4x - 2y + 4$.
Alors

$$\begin{aligned}\iiint_D x\; dV &= \iint_{\tilde{D}} \left(\int_{z=0}^{z=-4x-2y+4} x\; dz \right) dxdy = \int_0^1 \int_0^{-2x+2} \int_0^{-4x-2y+4} x\;\; dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{-2x+2} \cdot \Big[xz \Big]_0^{z=-4x-2y+4} \; dy\, dx = \int_0^1 dx \int_0^{-2x+2} \left(-4x^2 - 2xy + 4x \right)\; dy \\ &= \int_0^1 \left[(-4x^2 + 4x)y - xy^2 \right]_0^{-2x+2} \; dx = \cdots = \int_0^1 \left(4x^3 - 8x^2 + 4x \right)\; dx \\ &= \left[x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

8.2.3 Changement de variables

Soit $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un changement de variables donné par

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

On note $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| := \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$. Alors on a l'égalité

$$\boxed{dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw}$$

Coordonnées cylindriques

Si $h(\rho,\varphi,z) = (x,y,z)$ est définie par

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \rho > 0, \quad \varphi \in [0;\,2\pi], \quad z \in \mathbb{R}$$

alors

$$\nabla h = \begin{pmatrix} x_\rho & x_\varphi & x_z \\ y_\rho & y_\varphi & y_z \\ z_\rho & z_\varphi & z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $|\det\nabla h| = \rho$. Ceci donne la transformation

$$\boxed{dxdydz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz}$$

Coordonnées sphériques

Si $h(r,\varphi,\theta) = (x,y,z)$ est définie par

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad r > 0, \quad \theta \in [0;\,\pi], \quad \varphi \in [0;\,2\pi]$$

alors ∇h est donné au paragraphe §7.5 et l'on a trouvé

$$\det\nabla h = r^2\sin\theta.$$

Noter que $r^2\sin\theta > 0$ pour $r \neq 0$ et $\theta \in]0;\theta[$.
Ceci donne la transformation

$$\boxed{dxdydz = r^2\,\sin(\theta)\; dr\, d\varphi\, d\theta}$$

Exemple : soit D la sphère de centre O et de rayon R. Alors

$$Vol(D) = \iiint_D 1\cdot dxdydz = \iiint_D 1\cdot r^2\sin(\theta)\; drd\varphi d\theta = \int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} r^2\sin(\theta)d\theta\, d\varphi\, dr$$
$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi}\cdot\underbrace{\int_0^{\pi}\sin(\theta)\; d\theta}_{=2}\cdot\underbrace{\int_0^{R} r^2\; dr}_{=\frac{1}{3}R^3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Application : calcul de masse

Soit D un corps dont la masse volumique est $\mu(x, y, z)$. La masse d'un petit parallélépipède rectangle est

$$\Delta m_k \approx \mu(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k.$$

En intégrant, on trouve la masse totale du corps

$$M = \iiint_D \mu(x, y, z)\ dxdydz.$$

Application : calcul du centre de gravité

Comme pour la dimension 2, le **centre de gravité** est donné par la formule :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \iiint_D \mu(x, y, z) \cdot \overrightarrow{OP} \cdot dxdydz \qquad (*)$$

où $\mu(x, y, z)$ est la masse volumique et M la masse totale du corps.
En composantes, l'équation $(*)$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \iiint_D \mu(x, y, z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dxdydz$$

Exemple 8.7. Centre de gravité de l'hémisphère nord homogène ($\mu \equiv 1$).
$D = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0\right\}$

Par symétrie, $x_G = y_G = 0$.
De plus $M = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{2}{3}\pi R^3$.

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{M} \iiint_D z\ dxdydz \\ &= \frac{3}{2 \cdot \pi R^3} \iiint_{\tilde{D}} r\cos(\theta) \cdot r^2 \sin(\theta)\ \ drd\varphi d\theta \\ &= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R r^3\ dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos(\theta)\ \ d\theta\ \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3}{2\pi R^3} \cdot \frac{\pi R^4}{4} \\ &= 3\frac{R}{8}. \end{aligned}$$

Application : moment (polaire) d'inertie

Rappel : $J = mr^2$ où m est la masse et r la distance entre le corps et l'axe de rotation :

Corps de domaine D et de masse volumique $\mu(x,y,z)$.
Axe vertical passant par l'origine. Alors

$$\begin{aligned} J_z &= \iiint_D (x^2+y^2)\mu(x,y,z)\; dxdydz \qquad \Big| \text{coordonnées cylindriques} \\ &= \iiint_{\tilde{D}} \rho^2 \tilde{\mu}(\rho,\varphi,z)\;\rho\;\; d\rho d\varphi dz = \iiint_{\tilde{D}} \rho^3 \tilde{\mu}(\rho,\varphi,z)\;\; d\rho d\varphi dz \end{aligned}$$

Exemple : cylindre homogène de base un cercle de centre $(0,1)$ de rayon 1 et de hauteur 1 :

Equations en coordonnées cylindriques : $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \\ \rho \leqslant 2\sin\varphi \\ 0 \leqslant z \leqslant h \end{cases}$

$$\begin{aligned} J_z &= \iiint_{\tilde{D}} \rho^3 \cdot 1 \cdot d\rho d\varphi dz = \int_0^h \int_0^\pi \int_0^{2\sin\varphi} \rho^3 \; d\rho d\varphi dz \\ &= h \cdot \int_0^\pi \left[\frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^{2\sin\varphi} \; d\varphi \\ &= 4h \underbrace{\int_0^\pi \sin^4\varphi \; d\varphi}_{=\cdots=\frac{3\pi}{8}} = \frac{3}{2}\pi h. \end{aligned}$$

8.3 Intégrales de surfaces

8.3.1 Représentation paramétrique d'une surface

Nous traiterons ici uniquement le cas des surfaces dans $\mathbb{R}^3$.

Définition 8.8. Une **surface** est l'image d'un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ par une application continue $\Gamma : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

$(u,v) \in D$ sont les **paramètres**.

Remarque 8.9.
• Si l'on peut trouver une fonction $f(x,y)$ telle que $z = f(x,y)$, alors la surface est le graphe de f.

• Si l'on peut éliminer les paramètres u et v on obtient l'équation cartésienne de la surface $\Gamma : F(x,y,z) = 0$.

Exemples 8.10.

1. L'équation $x^2 + y^2 = 4$ est l'équation cartésienne d'un cylindre de révolution vertical d'axe Oz et de rayon 2. Une paramétrisation est

$$\begin{cases} x = 2\cos u \\ y = 2\sin u \qquad 0 \leqslant u \leqslant 2\pi, \qquad v \in \mathbb{R} \\ z = v \end{cases}$$

   ATTENTION : 1 équation dans $\mathbb{R}^3$ donne toujours une surface même si une variable n'apparaît pas.

2. Surface hélicoïdale H :

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \qquad u, v \in \mathbb{R} \\ z = c \cdot v \end{cases}$$

   Si l'on fixe un paramètre $u = R$ on obtient la courbe γ située sur H

$$\begin{cases} x = R\cos v \\ y = R\sin v \\ z = c \cdot v \end{cases}$$

   qui ne dépend plus que d'un paramètre v. C'est une hélice.

Plus généralement, si l'on fixe un des 2 paramètres d'une surface, on obtient une courbe situé sur la surface.

3. Sphère de centre O et de rayon R :

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases} \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi]$$

- En fixant $\theta = \theta_0$, on a

$$z = z_0 = R\cos\theta_0 = cste$$

et on obtient un cercle dans le plan horizontal $z = z_0$: c'est **un parallèle**. Si $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, c'est l'équateur.

- Si l'on fixe $\varphi = \varphi_0$, on obtient un cercle dans le plan vertical d'équation $\sin(\varphi_0) \cdot x - \cos(\varphi_0) \cdot y = 0$: c'est **un méridien**.

8.3.2 Calcul de l'aire d'une surface

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ et $\Gamma : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface définie par

$$\Gamma(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

En reprenant le calcul effectué pour le changement de variables (cf. §8.1.6), on obtient

$\vec{a} \approx \Gamma_u\, du$ et $\vec{b} \approx \Gamma_v\, dv$ avec

$$\Gamma_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Gamma_v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\boxed{dS = \|\Gamma_u \times \Gamma_v\|\, dudv}$$

et l'aire de la surface vaut

$$\boxed{A_S = \iint_{(u,v)\in D} \|\Gamma_u \times \Gamma_v\|\, dudv}$$

Relation importante :

$$\|\Gamma_u \times \Gamma_v\|^2 = \|\Gamma_u\|^2 \cdot \|\Gamma_v\|^2 \sin^2 \alpha = \|\Gamma_u\|^2 \cdot \|\Gamma_v\|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \|\Gamma_u\|^2 \cdot \|\Gamma_v\|^2 - (\Gamma_u \bullet \Gamma_v)^2$$

Exemple 8.11. Aire d'une zone sphérique :

$$\Gamma : \quad \begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases} \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

On a

$$\Gamma_\varphi = \begin{pmatrix} x_\varphi \\ y_\varphi \\ z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\varphi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma_\theta = \begin{pmatrix} x_\theta \\ y_\theta \\ z_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta \\ R\sin\varphi\cos\theta \\ -R\sin\theta \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\Gamma_\varphi \times \Gamma_\theta = \begin{pmatrix} -R^2\cos\varphi\sin^2\theta \\ -R^2\sin\varphi\sin^2\theta \\ -R^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

et donc $\|\Gamma_\varphi \times \Gamma_\theta\| = R^2 \sin\theta$. Alors

$$\boxed{dS = R^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta}$$

L'aire d'une "bande sphérique" comprise entre θ_1 et θ_2 est donc

$$S = \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} R^2 \sin(\theta) \; d\theta \; d\varphi = 2\pi \cdot R^2 \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \; d\theta = 2\pi R^2 (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = 2\pi R \cdot h$$

où $h = R\cos\theta_1 - R\cos\theta_2$ = hauteur de la bande.

On retrouve : aire de la sphère $= 4\pi R^2$.

8.3.3 Cas explicite $z = f(x, y)$

Si la surface est le graphe d'une fonction $z = f(x, y)$ alors une paramétrisation évidente est

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

Donc $\Gamma_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix}$ et $\Gamma_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix}$ ce qui donne

$$\|\Gamma_u \times \Gamma_v\| = \left\| \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}$$

L'aire de la surface vaut donc

$$\boxed{A_S = \iint_{(x,y)\in D} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy = \iint_{(x,y)\in D} \sqrt{1 + (\nabla f)^2}\, dxdy}$$

où $(\nabla f)^2 = \nabla f \bullet \nabla f = \nabla f \cdot \nabla^T f$.

Rappel : longueur d'une courbe. $L = \displaystyle\int_{x\in I} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

Exemple 8.12.
Calculer l'aire de la surface $z = f(x,y) = xy$ située à l'intérieur du cylindre $(\Gamma) : x^2+y^2 = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x = y \\ f_y = x \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy = \sqrt{1 + y^2 + x^2}\, dxdy$$

Donc

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\ dxdy = \iint_{\substack{(\rho,\varphi) \\ \rho\leqslant 1}} \sqrt{1+\rho^2}\ \rho\ d\rho\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\ d\rho = 2\pi\frac{1}{3}(1+\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Application

Surface $\Gamma(u,v),\ (u,v) \in D$ de masse surfacique $\mu(x,y,z)$. Alors sa masse est $M = \displaystyle\iint_D \mu\ dS$.

8.4 Intégrales dépendant d'un paramètre

Considérons une fonction $f(x,t)$ à 2 variables. Supposons que $f(x,t)$ et $f_t(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ sont continues sur un rectangle $D = \{(x,t)\,|\, x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$.
Posons

$$F(t) = \int_{x_1}^{x_2} f(x,t)\, dx.$$

Alors

Théorème 8.13 (Théorème 1)**.** *$F(t)$ est dérivable (même de classe C^1) et*

$$F'(t) = \int_{x_1}^{x_2} f_t(x,t)\ dt.$$

On peut passer la dérivée à l'intérieur de l'intégrale.

On généralise ce résultat au cas où les bornes dépendent de t.

Théorème 8.14 (Théorème 2)**.** *Soit*

$$F(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(x,t)\, dx.$$

Supposons que $f(x,t)$ et $f_t(x,t)$ sont continues en x et t et que $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont dérivables. Alors

$$F'(t) = f\big((x_2(t),t\big) \cdot \dot{x_2}(t) - f\big((x_1(t),t\big) \cdot \dot{x_1}(t) + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f_t(x,t)\, dx$$

Les théorèmes 1 et 2 se généralisent pour les fonctions à plus de 2 variables et pour les intégrales doubles ou triples.

Ces 2 théorèmes restent valables pour les intégrales impropres

$$\int_I f(x,t)\ dx$$

$\Big($ avec $I = \,]a;+\infty[$ et/ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x,t) = \pm\infty$ $\Big)$
si l'on rajoute ces 2 hypothèses :

(I) il existe une fonction $g(x) \geqslant 0$ définie sur I avec $|f(x,t)| \leqslant g(x)$ pour tout $t \in [t_1;t_2]$ et $\displaystyle\int_I g(x)\ dx < +\infty$;

(II) il existe une fonction $\psi(x) \geqslant 0$ définie sur I avec $|f_t(x,t)| \leqslant \psi(x)$ pour tout $t \in [t_1;t_2]$ et $\displaystyle\int_I \psi(x)\ dx < +\infty$.

Applications

1. Calcul de $I_\alpha(t) = \displaystyle\int_0^\infty \underbrace{e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin(tx)}{x}}_{=f(x,t)}\ dx \quad (\alpha > 0)$.

   Remarquons d'abord que $I_\alpha(0) = 0$.
   Intégrale impropre en $+\infty$ mais pas en $x = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} f(x,t) = 1 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(tx)}{x} = t$.
   On a
   $$f_t(x,t) = e^{-\alpha x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \cos(tx) \cdot x = e^{-\alpha x} \cos(tx).$$
   Vérifions les hypothèses (I) et (II) :

   (I) $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{e^{-\alpha x}}{x}$ dont l'intégrale sur $[1;+\infty[$ converge ;

   (II) $|f_t(x,t)| \leqslant e^{-\alpha x}$ et $\displaystyle\int_1^\infty e^{-\alpha x}\ dx$ converge.

Le théorème 1 donne alors

$$I'_\alpha(t) = \int_0^\infty f_t(x,t)\ dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(tx)\ dx \overset{I.P.P}{=} \frac{1}{\alpha^2+t^2}\left(t\sin tx - \alpha\cos tx\right)e^{-\alpha x}\Big|_0^\infty = \frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}.$$

En intégrant, on obtient

$$I_\alpha(t) = \int \frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}\,dt\ + C\ = \arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right) + C.$$

Comme $I_\alpha(0) = 0$ on en déduit que $C = 0$ et donc finalement que

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin(tx)}{x}\ dx = I_\alpha(t) = \arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right)}$$

2. Calcul de

$$J = \int_0^\infty e^{-x}\cdot x\cdot\sin x\ \ dx.$$

On pose

$$I(t) = \int_0^\infty \sin(x)\cdot e^{-tx}\ dx$$

pour $t \geqslant \epsilon > 0$.
Alors le théorème 1 (les hypothèses (I) et (II) sont remplies) donne

$$I'(t) = \int_0^\infty f_t(x,t)\ dx = \int_0^\infty \sin(x)\cdot e^{-tx}\cdot(-x)\ dx \quad\Longrightarrow\quad J = -I'(1).$$

Mais une intégration par parties donne

$$I(t) = \int_0^\infty \sin(x)\cdot e^{-tx}\ dx = \Big[-\frac{1}{1+t^2}(t\sin x + \cos x)e^{-tx}\Big]_0^\infty = \frac{1}{1+t^2}.$$

Donc $I'(t) = -\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$. On en conclut que $J = -I'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Intégrale d'Euler

Par définition on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ dt$$

Ici, x est le paramètre et t la variable d'intégration.
Pour tout $x > 0$, l'intégrale converge.
Propriétés :

- $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\ dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1.$
- $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^\infty \underbrace{t^x}_{f}\cdot\underbrace{e^{-t}}_{g'}\ dt \overset{\text{I.P.P.}}{=} \underbrace{-t^xe^{-t}\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty x\cdot t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x)$

  En particulier, si $x = n \in \mathbb{N}$, alors

  $$\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n) = n(n-1)\cdot\Gamma(n-1) = \cdots = n!\cdot\Gamma(1) = n!$$

  On peut donc dire que la fonction $\Gamma(x)$ étend la factorielle à tout $\mathbb{R}$.
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \displaystyle\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt \underbrace{=}_{t=u^2} \int_{u=0}^\infty u^{-1}e^{-u^2}2udu = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\ du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\ du = \sqrt{\pi}.$

8.5 Intégrales curvilignes

On ne traitera ici que le cas de courbes dans $\mathbb{R}^3$ mais les cas $n = 2$ ou $n > 3$ se déduisent aisément. On considère une courbe (dérivable)

$$\gamma : \ \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

8.5.1 Intégration d'un champ scalaire

Soit $f(x, y, z)$ une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^3$. On a envie de définir

$$\int_\gamma f \cdot ds.$$

Rappel :

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\ dt = \text{élément différentiel de longueur} = \|\dot{\gamma}(t)\|\ dt$$

On pose alors

$$\int_\gamma f \cdot ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|\ dt = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\ \ dt$$

Interprétation physique : si $f(x, y, z)$ est la masse par unité de longueur de la courbe γ, alors $\displaystyle\int_\gamma f \cdot ds$ est la masse totale de la courbe.

8.5.2 Intégration d'un champ vectoriel

Soit $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ une courbe et $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix}$ un champ vectoriel. Nous définissons

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{ds} = \int_a^b \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \bullet \dot{\gamma}(t)\ \ dt$$

où $\bullet$ désigne le produit scalaire.

Interprétation physique : si $\overrightarrow{F}$ est un champ de force et γ la trajectoire d'un mobile, alors

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{ds}$$

est le **travail** de F le long de γ.

Exemple : Soit le champ de force $F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ y^2 + x \end{pmatrix}$.
Calculer le travail de F entre les points $P(0, 1)$ et $Q(1, 2)$

(a) le long de la droite d passant par P et Q ;

(b) le long de la parabole Γ d'équation $y = x^2 + 1$.

Solution :

(a) Paramétrisation de d : $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$ avec $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Alors
$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
et le champ de force sur γ vaut
$$F\big(\gamma(t)\big) = F\big(t,\, t+1\big) = \begin{pmatrix} t^2 - (t+1) \\ (t+1)^2 + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - t - 1 \\ t^2 + 3t + 1 \end{pmatrix}$$
et l'intégrale devient
$$\begin{aligned} \int_d F \bullet ds &= \int_0^1 F\big(\gamma(t)\big) \bullet \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 - t - 1 \\ t^2 + 3t + 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \big(t^2 - t - 1 + t^2 + 3t + 1\big)\, dt = \big[\frac{2}{3}t^3 + t^2\big]_0^1 = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

(b) Paramétrisation de la parabole Γ : $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \end{pmatrix}$ avec $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Alors
$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$
et
$$F\big(\gamma(t)\big) = F\big(t,\, t^2+1\big) = \begin{pmatrix} t^2 - (t^2+1) \\ (t^2+1)^2 + t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ t^4 + 2t^2 + t + 1 \end{pmatrix}$$
et l'intégrale devient
$$\begin{aligned} \int_\Gamma F \bullet ds &= \int_0^1 F(\gamma(t)) \bullet \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} -1 \\ t^4 + 2t^2 + t + 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 2t^5 + 4t^3 + 2t^2 + 2t - 1 \;\; dt = \Big[\frac{t^6}{3} + t^4 + \frac{2}{3}t^3 + t^2 - t\Big]_0^1 = 2. \end{aligned}$$

On constate que le travail de F dépend du chemin parcouru. Ceci est vrai en général. Mais si F est le gradient d'une fonction, alors le travail est indépendant du chemin parcouru.

Théorème 8.15. *Soit $V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire de classe C^2 et*
$$\overrightarrow{F} = \nabla V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

le gradient de V.
Soit $\gamma : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe avec $\gamma(a) = P$ (point de départ) et $\gamma(b) = Q$ (point d'arrivée). Alors

$$\int_\gamma \vec{F} \bullet \vec{ds} = V\big(\gamma(b)\big) - V\big(\gamma(a)\big) = V|_Q - V|_P.$$

Le travail de F ne dépend pas du chemin parcouru mais uniquement du point de départ et du point d'arrivée.

En particulier, sur une courbe fermée (P=Q), on a $\oint_\gamma \nabla V \cdot \vec{ds} = 0$.

Démonstration :

$$\int_\gamma \vec{F} \bullet \vec{ds} = \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_a^b \nabla V(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \Big[V(\gamma(t))\Big]_a^b$$
$$= V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)).$$

car la règle de composition donne $\dfrac{d}{dt} V(\gamma(t)) = \nabla V(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$. □

Définition 8.16. Le champ scalaire V est appelé **potentiel** et on dit que $\vec{F}$ est un **champ conservatif** lorsqu'il existe V avec $\vec{F} = \nabla V$ (et V de classe C^2).

Comment savoir si un champ vectoriel donné est conservatif ou non ?

Supposons que $F = \nabla V$ avec V de classe C^2 . Alors

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

Comme V est de classe C^2, on doit avoir $V_{yx} = V_{xy}$, $V_{zy} = V_{yz}$ et $V_{zx} = V_{xz}$ ce qui donne

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \qquad (CI)$$

C'est une condition nécessaire. Si F ne satisfait pas (CI), il ne peut pas être conservatif.

Le théorème suivant affirme, que sur certains domaines D, (CI) est aussi une condition suffisante :
D'abord une définition :

Définition 8.17 (Simplement connexe)**.** Un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ ($\subset \mathbb{R}^2$) est dit **simplement connexe**

(1) si pour tout couple de points $P, Q \in D$ il existe une courbe (continue) contenue dans D et reliant P et Q. ;
(2) et si toute courbe fermée contenue dans D peut se contracter en un seul point sans sortir de D (il n'y a pas de "trous" dans D).

Théorème 8.18. *Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert simplement connexe et $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel tel que la condition (CI) soit satisfaite.*
Alors il existe un potentiel $V : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\nabla V = F.$$

Remarque : le théorème est aussi vrai dans le plan : il suffit de remplacer la condition (CI) par

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Démonstration :
On utilise les résultats sur les intégrales avec paramètres.
(i) On suppose d'abord que D est un parallélépipède rectangle (ou un rectangle si on est dans $\mathbb{R}^2$).
Choisissons un point $(x_0, y_0, z_0) \in D$ et pour tout $(x, y, z) \in D$, posons

$$V(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} F_1(\xi, y_0, z_0)\, d\xi + \int_{y_0}^{y} F_2(x, \eta, z_0)\, d\eta + \int_{z_0}^{z} F_3(x, y, \zeta)\, d\zeta$$

Alors

$$\begin{aligned} V_x(x,y,z) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) &= F_1(x,y_0,z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,\eta,z_0)\, d\eta + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,\zeta)\, d\zeta \\ &= F_1(x,y_0,z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F_1}{\partial \eta}(x,\eta,z_0)\, d\eta + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial F_1}{\partial \zeta}(x,y,\zeta)\, d\zeta \\ &= F_1(x,y_0,z_0) + \big[F_1(x,\eta,z_0)\big]_{y_0}^{y} + \big[F_1(x,y,\zeta)\big]_{z_0}^{z} \\ &= F_1(x,y_0,z_0) + F_1(x,y,z_0) - F_1(x,y_0,z_0) + F_1(x,y,z) - F_1(x,y,z_0) \\ &= F_1(x,y,z) \end{aligned}$$

De même on calcule que $V_y(x,y,z) = F_2(x,y,z)$ et $V_z(x,y,z) = F_3(x,y,z)$ ce qui montre que

$$\nabla V = F.$$

(ii) Si D n'est pas un parallélépipède rectangle, on intègre de proche en proche.

□

Contre-exemple : l'hypothèse D simplement connexe est essentielle.
Considérons le champ vectoriel

$$F = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

On a

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Mais F n'est pas continu en $(0,0)$. Et donc le domaine D n'est pas simplement connexe.
Intégrons ce champ vectoriel le long d'un cercle centré à l'origine et de rayon 1 :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

$$\overrightarrow{ds} = \dot{\gamma}(t)\ dt = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}\ dt$$

et

$$\int_\gamma F(\gamma(t)) \bullet \overrightarrow{ds} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2+\cos^2 t}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}\ dt = \int_0^{2\pi} 1\ dt = 2\pi.$$

Si le théorème s'appliquait, on devrait trouver 0.
En revanche, si on prend une courbe **fermée** γ **ne contenant pas le point** $(0,0)$ alors on aura bien $\displaystyle\int_\gamma F \bullet \overrightarrow{ds} = 0$.